ГЛАВА ШЕСТАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 15. Тригонометрические функции числового аргумента

91. Радианное измерение углов

Из курса математики восьмилетней школы известны различные единицы измерения углов: прямой угол d, градус, минута, секунда*:

$$d = 90^\circ,\ 1^\circ = 60',\ 1' = 60''.$$

$$1^\circ = \frac{1}{90}d,\ 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ,\ 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'.$$

В дальнейшем нам понадобится еще одна единица измерения углов — радиан.

Радианом называется угол в $\frac{180}{\pi}$ *градусов*

$$1\ \textit{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Целесообразность введения такой единицы измерения углов объясняется очень просто: если величина центрального угла равна радиану, то длина дуги, на которую опирается этот угол, равна радиусу.

В самом деле, в окружности радиуса r центральный угол в 180° опирается на дугу длины πr, центральный угол в 1° опирается на

---

* Строго говоря, надо различать *угол* как геометрическую фигуру и *величину угла*. Два конгруэнтных угла

$$\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1$$

имеют одну и ту же величину

$$\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}.$$

Для краткости величину угла называют просто углом.

Теми же единицами измерения пользуются, говоря о повороте или вращении на то или иное положительное или отрицательное число градусов. По существу дело идет о системе угловых величин, применения которой довольно разнообразны. Например, в стереометрии вы научитесь выражать в градусах величину двугранных углов, величину углов между скрещивающимися прямыми и т. д. Вам хорошо знакомы из механики и смысл таких выражений, как вращение на 1200° или на -1200°.

8 Заказ 1079

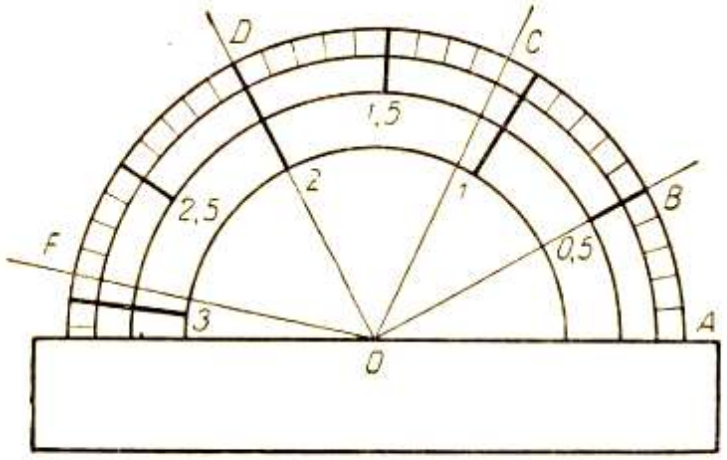

Рис. 110

дугу длины $\frac{\pi}{180}r$, а центральный угол в $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ — на дугу длины $\frac{180}{\pi}\left(\frac{\pi}{180}r\right) = r$.

С еще более существенным достоинством радианной меры углов мы встретимся в § 20 при вычислении производных тригонометрических функций.

Для практического измерения углов в радианной мере может служить специальный транспортир, на полуокружности которого отмечены радианы и их части (рис. 110). Разделив каждое деление транспортира на 10 равных частей, мы получим возможность измерять углы с точностью до 0,01 радиана и т. д.

На рисунке 110 радианные меры углов $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle AOF$ соответственно равны: 0,5; 1,1; 2; 2,9.

П р и м е р ы. Выразить в радианной мере углы в 45°, 36°, 135°, 250°, 330°.

Р е ш е н и е. $45^{\circ} = 45 \cdot \frac{\pi}{180}\ \textit{рад} = \frac{\pi}{4}\ \textit{рад};$

$$36^{\circ} = 36 \cdot \frac{\pi}{180}\ \textit{рад} = \frac{\pi}{5}\ \textit{рад};$$

$$135^{\circ} = 135 \cdot \frac{\pi}{180}\ \textit{рад} = \frac{3\pi}{4}\ \textit{рад};$$

$$250^{\circ} = 250 \cdot \frac{\pi}{180}\ \textit{рад} = \frac{25\pi}{18}\ \textit{рад};$$

$$330^{\circ} = 330 \cdot \frac{\pi}{180}\ \textit{рад} = \frac{11\pi}{6}\ \textit{рад}.$$

В практических расчетах часто приходится градусную меру углов переводить в радианную или наоборот. Чтобы облегчить эту работу, составлены специальные таблицы. Приведем фрагмент таблицы из сборника В. М. Брадиса.

85°	1,4835	4853	4870	4888	4905	4923	4940	4957	4975	4992	3 6 9
86°	1,5010	5027	5045	5062	5080	5097	5115	5132	5149	5167	3 6 9
87°	1,5184	5202	5219	5237	5254	5272	5289	5307	5324	5341	3 6 9
88°	1,5359	5376	5394	5411	5429	5446	5464	5481	5499	5516	3 6 9
89°	1,5533	5551	5568	5586	5603	5621	5638	5656	5673	5691	3 6 9
90°	1,5708										
	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	1 2 3

Пример. Найти радианную меру угла в 86°38′.

Решение. В левом столбце таблицы отыскиваем 86°, затем перемещаемся по соответствующей строке до столбца таблицы, под которым (или над которым) написано число минут, ближайшее к 38, т. е. до столбца для 36′. На пересечении указанных строки и столбца находим радианную меру угла 86°36′, к которой надо еще прибавить поправку на недостающие 2′ (см. три последних столбца), и тем самым получаем:

$$\begin{array}{r} 86^\circ 36' - 1{,}5115 \\ 2' - \quad\quad 6 \\ \hline \end{array}$$

Ответ: $86^\circ 38' \approx 1{,}5121$ *рад.*

Этими же таблицами можно пользоваться и при переходе от радианной меры к градусной. Например, требуется найти градусную меру угла $\alpha = 1{,}5248$ *рад.*

Решение. Ищем в таблице число, ближайшее к данной радианной мере, т. е.

$$\begin{array}{rr} 1{,}5254 - & 87^\circ 24' \\ -6 - & -2' \\ \hline \end{array}$$

Ответ: $1{,}5248$ *рад* $\approx 87^\circ 22'$

Упражнения

632. Определить градусную и радианную меры углов прямоугольного равнобедренного треугольника, не пользуясь таблицами.

633. Определить градусную и радианную меры углов четырехугольника, если они относятся как 5 : 9 : 10 : 12 (без таблиц).

634. Определить градусную и радианную меры углов пятиугольника, если они относятся как 6 : 7 : 9 : 12 : 14 (без таблиц).

635. Найти угловую скорость диска, вращающегося со скоростью 300 *об/мин* (в радианах в секунду).

636. Вычислить угловую скорость часовой и минутной стрелок (в радианах в час).

637. Зубчатое колесо имеет 96 зубцов. Выразить в радианах угол поворота колеса, когда оно повернется против движения часовой стрелки на: 30 зубцов, 36 зубцов, 48 зубцов, 72 зубца, 300 зубцов, 750 зубцов, 984 зубца.

638. Хорда делит окружность в отношении 5 : 13. Определить величины опирающихся на эту хорду вписанных углов в радианной мере.

639. Определить внутренние углы пятиугольника, описанного около окружности, если точки касания его сторон делят окружность в отношении 5 : 7 : 10 : 12 : 14.

640. С помощью таблиц найти радианные меры углов: 15°, 50°36′, 137°, 237°, 142°57′, 273°37′, 315°39′, 345°28′.

641. С помощью таблиц найти градусные меры углов по данным их радианным мерам: 0,4853, 0,3756, 1,3246, 3,1416, 4,9681, 5,3842, 7,1567.

642. Окружность разделена на восемь конгруэнтных частей точками A, B, C, D, E, M, N, P. Найти радианные меры положительных дуг (т. е. дуг, измеряемых в направлении против движения часовой стрелки) $\smile AB$, $\smile AC$, $\smile AD$, $\smile AE$, $\smile AM$, $\smile AN$, $\smile AP$ и радианные меры отрицательных дуг $\smile AP$, $\smile AN$, $\smile AM$, $\smile AE$, $\smile AD$, $\smile AC$, $\smile AB$.

643. Окружность морского компаса делится на 32 конгруэнтные части, называемые румбами. Выразить один румб в градусной и радианной мерах.

644. Определить длину дуги окружности радиуса $R = 20$ *см*, если дуга содержит $36°$.

645. Дуга окружности равна 20 *см*. Определить радианную и градусную меры этой дуги, если радиус окружности равен 52 *см*.

646. Выразить в радианах сумму внешних углов выпуклого шестиугольника.

92. Об одном замечательном отображении числовой прямой на окружность

На координатной плоскости рассмотрим окружность, определенную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Эту окружность будем называть *единичной окружностью* (ее радиус равен принятой в нашей системе координат единице измерения, а центр совпадает с началом координат). Представим себе, что подвижная точка P двигается по единичной окружности с единичной скоростью, т. е. проходит за единицу времени дугу единичной длины. Предположим, что эта подвижная точка, двигаясь против часовой стрелки, в начальный момент времени $t = 0$ занимает положение P_0, где P_0 — точка с координатами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Легко понять, что при соблюдении этих условий точка P в момент времени $t = -1$ занимала положение P_{-1}, а в момент времени $t = 1$ займет положение P_1 (рис. 111). На рисунках 112 и 113 отмечены положения точки P при некоторых $t > 0$ и $t < 0$.

Обозначим через P_t положение нашей подвижной точки в момент времени t. Мы описали на языке кинематики функцию или отображение

$$t \mapsto P_t, \qquad (1)$$

которое каждому действительному числу t ставит в соответствие точку единичной окружности. Таким образом, у нашей функции область определения есть множество всех действительных чисел.

Так как подвижная точка P пробегает все точки единичной окружности (попадая в каждую ее точку бесконечное множество раз), то множеством значений определенной нами функции является множество всех точек единичной окружности.

Можно дать математическое определение отображения (1), не прибегая к языку кинематики.

1. При $t = 0$ точка P_0 определяется своими координатами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

2. Если $0 < t < 2\pi$, то положение точки P_t определяется тем, что

$$\widehat{P_0OP_t} = t \text{ рад}$$

и $\angle P_0OP_t$ отложен от луча OP_0 в направлении против вращения часовой стрелки.

3. За время $t = 2\pi$ точка P_t проходит полную окружность и возвращается на прежнее место. Поэтому при любом t имеем равенство:

$$P_{t+2\pi} = P_t.$$

Из 3 вытекает 3′.

3′. При любом t и любом целом n

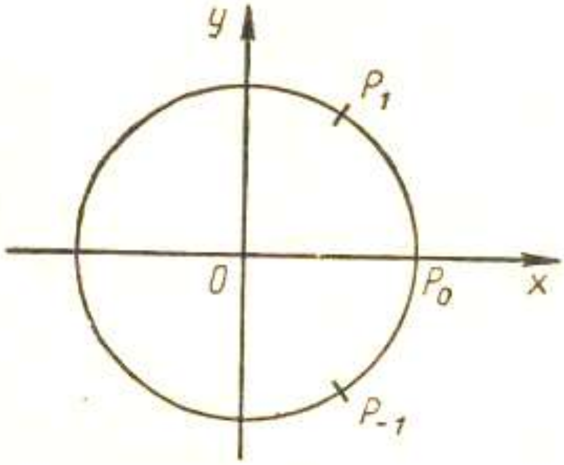

Рис. 111

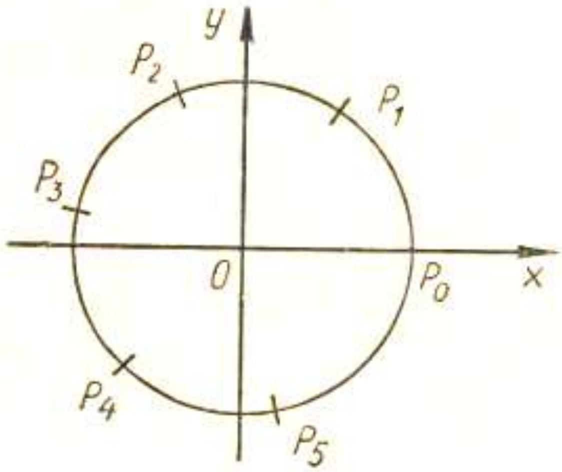

Рис. 112

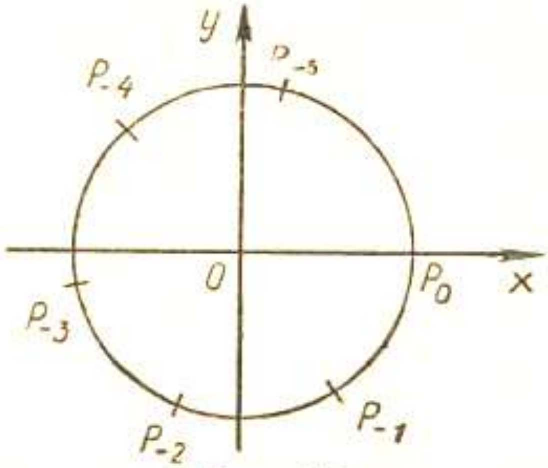

Рис. 113

$$P_{t+2\pi n} = P_t.$$

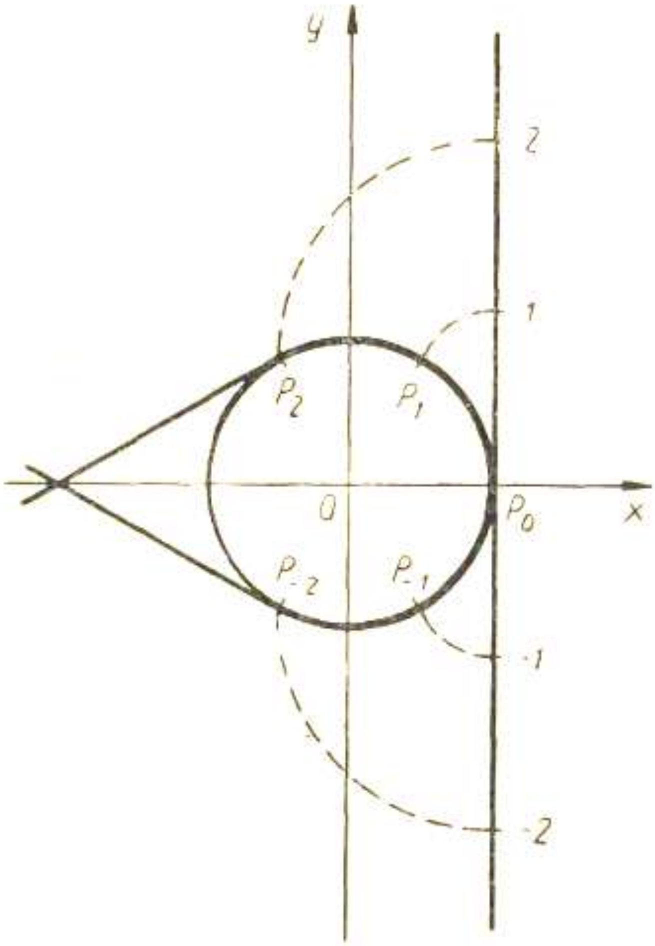

Рис. 114

Условия 1—3 полностью определяют отображение (1). В самом деле, условия 1 и 2 определяют положение точки P_t при t, лежащих в пределах $0 \leqslant t < 2\pi$. Если t лежит за этими пределами, то его всегда можно представить в виде $t = 2\pi n + t'$, где n — целое число, а t' лежит в пределах $0 \leqslant t' < 2\pi$. Тогда по условию 3′, которое является следствием условия 3, получим:

$$P_t = P_{t'}.$$

Так как отображение (1) весьма существенно для дальнейшего, отметим еще одну возможность представить его наглядно.

На координатной плоскости вертикальная прямая с уравнением $x = 1$ является касательной в точке P_0 к единичной окружности. Представим себе бесконечную нерастяжимую нить, натянутую вдоль этой прямой и закрепленную в точке P_0. Будем оба конца этой нити «наматывать» на единичную окружность, как это показано на рис. 114. Ясно, что точка нити, которая в начальном положении (нить протянута вдоль прямой $x = 1$) имела ординату α, после наматывания попадет в точку P_α единичной окружности, а точки прямой, ординаты которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π, наложатся при наматывании на окружность на одну и ту же точку.

Таким образом, для того чтобы два действительных числа α и α' отображались в одну и ту же точку единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha' - \alpha = 2\pi n,$$

где n — некоторое целое число.

Упражнения

647. Единичная окружность разделена на 12 конгруэнтных частей, начиная от начальной точки A_0 (рис. 115). Какие наименьшие неотрицательные числа изображают полученные точки деления окружности? Какие наименьшие по абсолютной величине отрицательные числа изображают те же точки окружности? (Ответы выразить через число π.)

648. Отметить на единичной окружности все точки, соответствующие действительным числам вида $\frac{\pi}{6} n + \frac{\pi}{8}$, где n—любое целое число.

649. Найти радианные меры центральных углов, опирающихся на дуги в упражнении 647, считая началом дуг точку A_0, а их концами точки деления окружности (рис. 115).

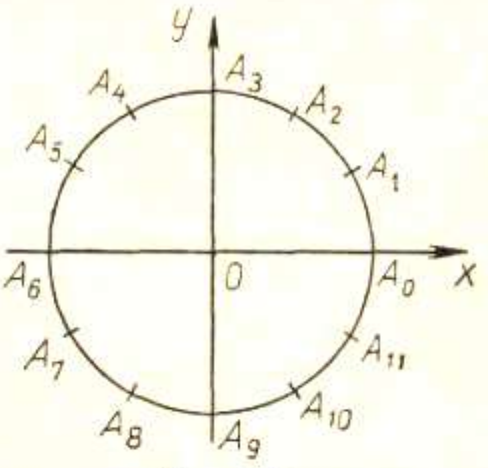

Рис. 115

650. Определить радианную меру дуги, описываемой концом минутной стрелки часов: а) за 5 *мин*; б) за 12 *мин*; в) за 2 *ч* 10 *мин*; г) за 2 *ч* 42 *мин*; д) за 3 *ч* 15 *мин*.

651. Какую линейную скорость имеет точка вращающегося диска, удаленная на 18 *см* от оси вращения, если угловая скорость диска равна $\frac{\pi}{3}$ *рад/сек*? Какой длины дугу опишет эта точка за 45 *мин*?

93. Синус и косинус числового аргумента

В п. 92 мы определили отображение

$$t \mapsto P_t$$

числовой прямой $\mathbb{R}$ на единичную окружность. Обозначим через x_t и y_t соответственно абсциссу и ординату точки P_t (рис. 116). Получим два отображения

$$t \mapsto x_t,$$
$$t \mapsto y_t$$

числовой прямой $\mathbb{R}$ в себя (x_t и y_t — действительные числа!), т. е. две числовые функции. Эти функции имеют специальные названия *косинус* и *синус* и специальные обозначения cos и sin:

$$\cos t = x_t, \ \sin t = y_t.$$

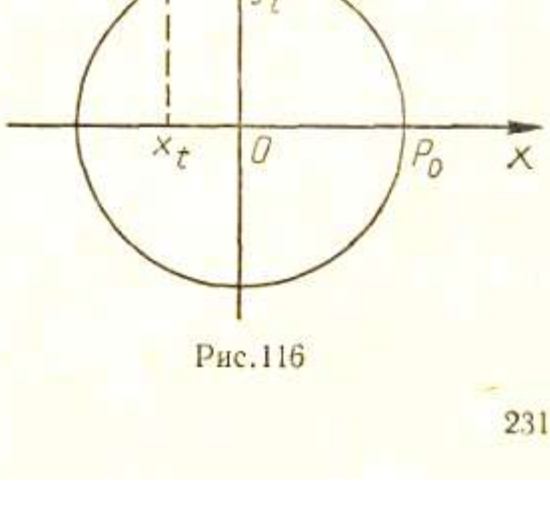

Рис.116

Определение 1. ***Синусом действительного числа t называется ордината точки P_t единичной окружности, соответствующей числу t по правилу, описанному в п. 92.***

Очевидно, областью определения функции sin является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Так как ордината любой точки единичной окружности по модулю не превосходит единицы и для любого числа $y \in [-1; 1]$ на окружности существуют точки с ординатой y, то множество значений функции синус есть отрезок $[-1; 1]$.

Определение 2. ***Косинусом действительного числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности, соответствующей числу t по правилу п. 92.***

Областью определения косинуса является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Множеством значений этой функции является отрезок $[-1; 1]$.

Рассмотрим пример: единичная окружность (рис. 115) разделена на 12 конгруэнтных частей точками A_0, A_1, A_2, ..., A_{11}, начиная от точки A_0 с координатами $(1, 0)$, в положительном направлении. Составить таблицу значений синуса и косинуса наименьших неотрицательных чисел, изображаемых этими точками.

Решение. На рисунке 115 точки деления изображают соответственно числа (см. упр. 647):

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}.$$

Ординаты этих точек равны соответственно:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Абсциссы тех же точек равны соответственно:

$$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тем самым получаем таблицу искомых значений:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Так как координаты любой точки единичной окружности удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

то для любого действительного числа α имеет место равенство

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}. \tag{2}$$

Упражнения

652. Проверить справедливость равенства (2) по приведенной выше таблице.

653. Найдется ли такое значение аргумента α, для которого:

а) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$;

б) $\sin\alpha = -\frac{12}{37}$, $\cos\alpha = \frac{35}{37}$;

в) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2}{5}$?

Упростить следующие выражения с помощью равенства (2):

654. $\sin^2\alpha - 1$.

655. $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

656. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

657. $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

658. $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

659. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

660. $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

661. $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

662. $\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$.

663. $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.