96. Тангенс и котангенс числового аргумента

Определение 3. ***Тангенсом действительного числа α называется отношение синуса этого числа к его косинусу, т. е.***

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{1}$$

Определение 4. ***Котангенсом действительного числа α называется отношение косинуса этого числа к его синусу, т. е.***

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{2}$$

Из этих определений следует, что область определения тангенса состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида $\pi n + \frac{\pi}{2}$ при любом целом n; область определения котангенса состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида πn при любом целом n.

Перемножая равенства (1) и (2) почленно, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \tag{3}$$

Последнее равенство имеет место только для тех значений α, для которых и тангенс и котангенс существуют, т. е. для всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2}n$, где n — целое число.

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются тригонометрическими функциями. Иногда рассматривают еще две тригонометрические функции — секанс и косеканс, которые определяются следующим образом:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ и } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Упражнения

664. Найти области определения секанса и косеканса.

665. Дополнить таблицу предыдущего пункта значениями тангенса, котангенса, секанса и косеканса тех же чисел.

Упростить следующие выражения с помощью формул (1) — (5):

666. $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha$.

667. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$.

668. $\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$.

669. $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

670. $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$.

671. $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

672. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. 673. $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Доказать следующие тождества:

674. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

675. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.

676. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

677. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=1$.

678. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

679. $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.

680. $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

681. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$.

682. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

683. $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1-2\sin\alpha\cos\alpha$.

684. $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

97. Таблицы тригонометрических функций числового аргумента

В четырехзначных математических таблицах В. М. Брадиса имеются таблицы VII, VIII, IX, X для определения значений тригонометрических функций углов, выраженных в градусной мере. Там же имеется таблица XII, отрывок из которой приводится ниже.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1,20	0,9320	0,3624	2,572	1,60	0,9996	−0,0292	−34,233	2,00	0,9093	−0,4161	−2,1850
1,21	9356	3530	650	1,61	9992	0392	−25,495	2,01	9051	4252	1285
1,22	9391	3436	733	1,62	9988	0492	−20,307	2,02	9008	4342	0744
1,23	9425	3342	820	1,63	9982	0592	−16,871	2,03	8964	4432	0224
1,24	9458	3248	912	1,64	9976	0691	−14,427	2,04	8919	4522	−1,9725
1,25	9490	3153	3,010	1,65	9969	0791	−12,599	2,05	8874	4611	9246

По этой таблице определяются значения синуса, косинуса и тангенса числового аргумента. Например, $\sin 2{,}04 = 0{,}8919$, $\cos 2{,}04 = -0{,}4522$, $\operatorname{tg} 2{,}04 = -1{,}9725$.

Упражнения

685. С помощью таблицы XII найти значения синуса, косинуса и тангенса чисел: 0,03; 0,30; 0,37; 1; 1,43; 2; 2,15; 3; 3,07.

98. Тригонометрические функции и координаты вектора

Тригонометрические функции позволяют дать простое выражение зависимостям между длиной вектора, его углом с осью абсцисс и его координатами. Чтобы разобраться в этом вопросе, надо вспомнить основные сведения о векторах и их координатах. Заметим, что на координатной плоскости уже выбрана определенная единица измерения расстояний и длин отрезков. Поэтому удобно числовое значение длины отрезка называть просто его длиной. Таким образом, далее у нас длина отрезка $[AB]$ есть просто *число.*

Мы знаем, что ненулевой вектор полностью определяется своим направлением и своей длиной. Векторы удобно изображать отрезками (рис. 122). Выбрав любую точку O и отложив от нее по характеризующему вектор $\vec{a}$ направлению отрезок $[OA]$ длины $|\vec{a}|$, получим изображение вектора $\vec{a}$. Начальную точку O можно выбрать произвольно. На рисунке 123 отрезки $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ являются изображениями одного и того же вектора. На координатной плоскости векторы удобно изображать отрезками, исходящими из начала координат O. Равенство

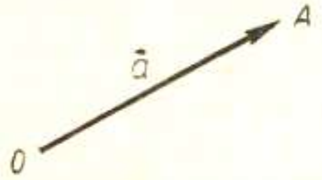

Рис. 122

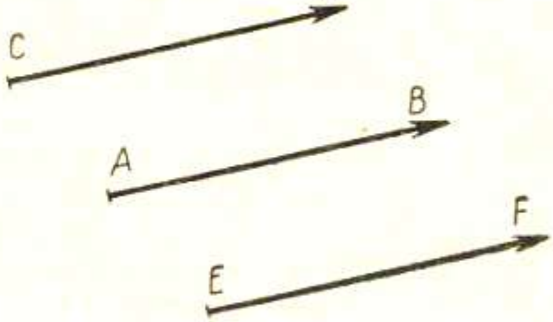

Рис. 123

$$\vec{a} = \vec{OA}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами и точками A координатной плоскости (при $A = O$ получается нулевой вектор). Координаты точки A называются *координатами вектора* $\vec{a}$ и обозначаются через x_a и y_a (рис. 124).

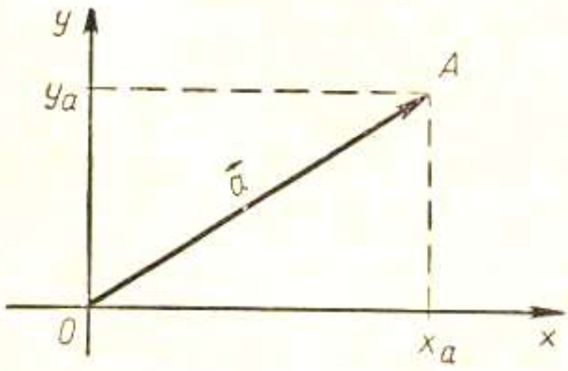

Рис. 124

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором или *ортом*.

Единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, называется *ортом вектора* $\vec{a}$. Если обозначить орт вектора $\vec{a}$ через $\vec{e}$, то (рис. 125)

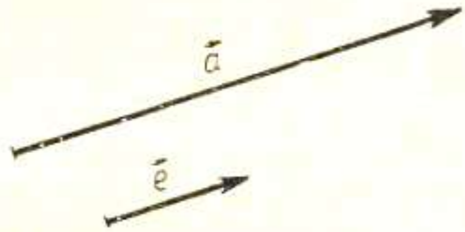

Рис. 125

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}.$$

Обычно орты координатных осей обозначают буквами $\vec{i}$ и $\vec{j}$. В геометрии установлена основная формула, связывающая вектор $\vec{a}$ с его координатами x_a, y_a (рис. 126):

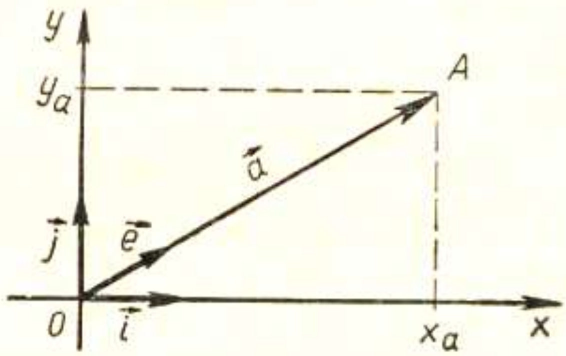

Рис. 126

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}.$$

Если

$$\vec{e} = x_e\vec{i} + y_e\vec{j}$$

орт вектора $\vec{a}$, то

$$x_a = |\vec{a}| \cdot x_e, \quad y_a = |\vec{a}| \cdot y_e. \tag{1}$$

Пусть теперь вектор $\vec{a}$ и его орт $\vec{e}$ образуют с положительным направлением оси Ox угол α. Под углом α мы понимаем угол, на который надо повернуть ось Ox вокруг точки O, чтобы совместить ее с лучом OA.

Из определений п. 93 непосредственно вытекает, что координаты x_e и y_e орта $\vec{e}$ равны соответственно косинусу и синусу угла α, т. е.

$$x_e = \cos\alpha, \quad y_e = \sin\alpha. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}, \ \sin\alpha = \frac{y_a}{|\vec{a}|}. \tag{3}$$

Вспомнив определения остальных четырех тригонометрических функций, получим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_a}{x_a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x_a}{y_a}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{|\vec{a}|}{x_a}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{a}|}{y_a}$.

Равенства $\sin\alpha = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$, $\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_a}{x_a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_a}{y_a}$, $\sec\alpha = \frac{|\vec{a}|}{x_a}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{|\vec{a}|}{y_a}$ можно было бы принять в качестве определений тригонометрических функций. Иногда так и делается. При таком подходе к делу становится понятным, почему тригонометрических функций шесть: это все шесть попарных отношений, которые можно составить для трех чисел:

$$x_a, \ y_a, \ |\vec{a}|.$$

Упражнения

686. Построить векторы, образующие с осью Ox углы: 60°, 250°, 290°, 1080°, 3850°, -70°, -140°, -190°, -250°, -1040°, -2560°, воспользовавшись, где надо, транспортиром.

687. Определить в градусах величину угла, на который повернется минутная стрелка часов за 5 *мин*, за 18 *мин*, за 2 *ч* 15 *мин*, за 6 *ч* 48 *мин*, учитывая направление поворота стрелки.

688. Сторона правильного шестиугольника AB расположена на оси $\vec{l}$, вершины этого шестиугольника $ABCDEF$ обозначены буквами, расположенными по порядку против движения часовой стрелки. Определить углы, образованные векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EA}$ с осью $\vec{l}$, направление которой совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{AB}$.

689. Ведро в колодце поднимается на 2 *м*, если рукоятку ворота повернуть на 5 полных оборотов по ходу движения часовой стрелки. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро опустилось на 1,25 *м*?

690. Два зацепляющихся зубчатых колеса имеют: одно — 36 зубцов, другое — 48 зубцов. Меньшее колесо сделало три полных оборота по ходу движения часовой стрелки. На сколько градусов повернется при этом большее колесо?

691. Угловая скорость колес движущегося автомобиля 40 *рад/сек*. В какое время он пройдет с такой скоростью участок шоссе в 18 *км*? Радиус колеса автомобиля 0,5 *м*.