§ 16. Основные свойства тригонометрических функций

99. Знаки значений тригонометрических функций

Оси координат Ox, Oy прямоугольной системы координат делят всю координатную плоскость на четыре части, называемые *четвертями* или *квадрантами*. Эти четверти нумеруются против движения часовой стрелки, как показано на рисунке 127. Единичная окружность с центром в начале координат тоже делится на четыре четверти, которые нумеруются так же, как и четверти плоскости.

Любой вектор, выходящий из начала координат, или расположен на какой-либо оси системы координат xOy, или находится в какой-нибудь четверти. Так, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ находятся соответственно в I, II, III и IV четвертях координатной плоскости. Далее будем говорить, что указанные векторы образуют с положительным направлением оси Ox углы соответственно I, II, III и IV четвертей.

Точно так же говорят и о числах. Если число α изображается точкой II четверти единичной окружности, то будем говорить, что *число α находится во второй четверти*. Так, числа 1,5; 2,7; 3,4; 6,7 находятся соответственно в I, II, III и IV четвертях.

После этих соглашений легко определяются знаки значений любой тригонометрической функции для любого значения ее аргумента (числового, дугового и углового).

Ординаты точек (векторов) I и II четвертей положительны, а III и IV четвертей отрицательны. Поэтому синусы чисел (углов) I и II четвертей положительны, а для III и IV четвертей они отрицательны.

Абсциссы точек (векторов), находящихся в I и IV четвертях, положительны, а для остальных четвертей они отрицательны.

Так как знак значения синуса совпадает со знаком ординаты точки единичной окружности, а знак значения косинуса совпадает со знаком абсциссы этой точки, то знаки значений этих функций можно представить наглядно, как это сделано на рисунке 128.

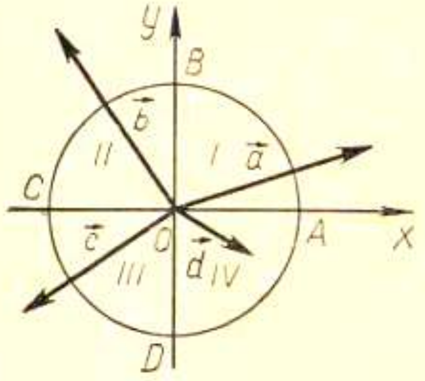

Рис. 127

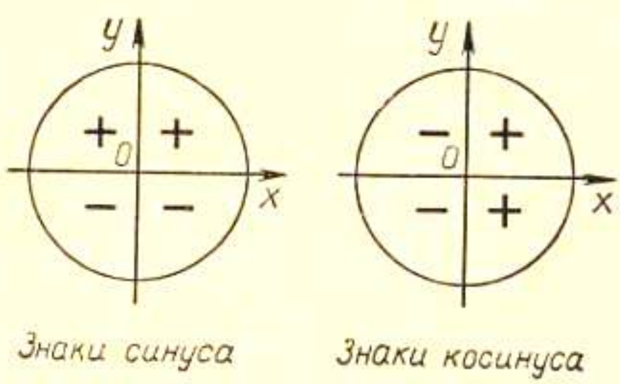

Рис. 128

Там, где синус и косинус имеют одинаковые знаки, т. е. в I и III четвертях, тангенс и котангенс положительны. Там, где знаки синуса и косинуса различны, т. е. во II и IV четвертях, тангенс и котангенс отрицательны.

Примеры. 1) Угол 350° находится в IV четверти, поэтому $\sin 350° < 0$, $\cos 350° > 0$, $\operatorname{tg} 350° < 0$, $\operatorname{ctg} 350° < 0$.

2) Угол $-160°$ находится в III четверти, поэтому $\sin(-160°) < 0$, $\cos(-350°) < 0$, $\operatorname{tg}(-350°) > 0$, $\operatorname{ctg}(-350°) > 0$.

3) Число 2,5 находится во II четверти, поэтому $\sin 2{,}5 > 0$, $\cos 2{,}5 < 0$, $\operatorname{tg} 2{,}5 < 0$, $\operatorname{ctg} 2{,}5 < 0$.

4) Число $(-2{,}5)$ находится в III четверти, поэтому $\sin(-2{,}5) < 0$, $\cos(-2{,}5) < 0$, $\operatorname{tg}(-2{,}5) > 0$, $\operatorname{ctg}(-2{,}5) > 0$.

Упражнения

692. Определить знаки значений всех тригонометрических функций следующих углов и чисел: 1) 143°; 2) $-243°$; 3) 735°; 4) $-735°$; 5) 0,35; 6) $-0{,}5$; 7) 5,6; 8) $-3{,}5$; 9) 7,3; 10) $-7{,}3$.

693. Определить знаки следующих выражений:

1) $\sin 300° \cdot \cos 200°$; 2) $\sin 193° \cdot \operatorname{tg} 202°$;
3) $\cos 247° \cdot \sin 112°$; 4) $\operatorname{tg} 147° \cdot \operatorname{ctg} 293°$;
5) $\cos 40° \cdot \sin 120° \cdot \operatorname{tg} 150°$; 6) $\operatorname{tg} 97° \cdot \operatorname{ctg} 197° \cdot \cos 297°$;
7) $\sin 1000° \cdot \cos 840° \cdot \operatorname{tg} 375°$; 8) $\sin 3 \cdot \cos 5$;
9) $\cos 8 \cdot \cos 5 \cdot \operatorname{tg} 1$; 10) $\operatorname{tg} 5 \cdot \operatorname{ctg} 3 \cdot \sin 2$;
11) $\sin(-5) \cdot \cos(-3) \cdot \operatorname{tg}(-2) \cdot \operatorname{ctg} 2$.

Рассмотрим следующие примеры:

Пример 1. Пусть требуется найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из равенства $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ получаем новое равенство $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, справедливое при любом значении α. Знак в последнем равенстве выбирается в зависимости от четверти, в которой находится α. В данном примере число α находится в III четверти, поэтому получаем $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{13^2-12^2}{13^2}} = -\frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5}{12}.$$

Пример 2. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и α — число во II четверти.

Решение. Так как $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{3}{4}$.

Для отыскания $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно воспользоваться следующими соображениями:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-3}{4} = \frac{-3t}{4t},$$

где t — любое, отличное от нуля число. Выбрав значение t так, чтобы выполнялось равенство

$$(-3t)^2 + (4t)^2 = 1, \qquad (1)$$

будем иметь:

$$\sin\alpha = -3t, \ \cos\alpha = 4t.$$

Из равенства (1) получаем: $25t^2 = 1$, $t = \pm\frac{1}{5}$. Но для II четверти имеем $\sin\alpha > 0$, т. е. $t = -\frac{1}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Упражнения

В следующих задачах по данному значению одной из тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и четверти, в которой находится α, найти значения остальных трех функций:

694. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

695. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

696. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{40}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

697. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

698. $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

699. $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

700 $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{35}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

701. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{13}{84}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

702. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

703. $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.