§ 18. Свойства тригонометрических функций и их графики

107. Свойства функции синус и ее график

Так как синус — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π, то для изучения ее свойств во всей области определения достаточно изучить их лишь в промежутке длины 2π, например $[0; 2\pi]$. Во всех остальных таких промежутках эти свойства будут повторяться.

Разделим промежуток $[0; 2\pi]$ на четыре равные части (четверти)

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$$

и докажем следующие свойства функции синус:

1. В I четверти функция строго возрастает от 0 до **1**.

Упражнения

747. Отметить по графику котангенса промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\operatorname{ctg} x > 1$; б) $\operatorname{ctg} x < -1$; в) $|\operatorname{ctg} x| < 1$.

2. Во II четверти функция строго убывает от 1 до 0.
3. В III четверти функция строго убывает от 0 до -1.
4. В IV четверти функция строго возрастает от -1 до 0.
Эти свойства могут быть записаны в виде таблицы:

x	0	I четв.	$\frac{\pi}{2}$	II четв.	π	III четв.	$\frac{3\pi}{2}$	IV четв.	2π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

Стрелки ↗ и ↘ показывают соответственно возрастание и убывание синуса.

Для доказательства этих свойств строим единичную окружность с центром в начале системы координат uOy, где для удобства ось абсцисс обозначена через Ou, и на этой окружности будем отмечать

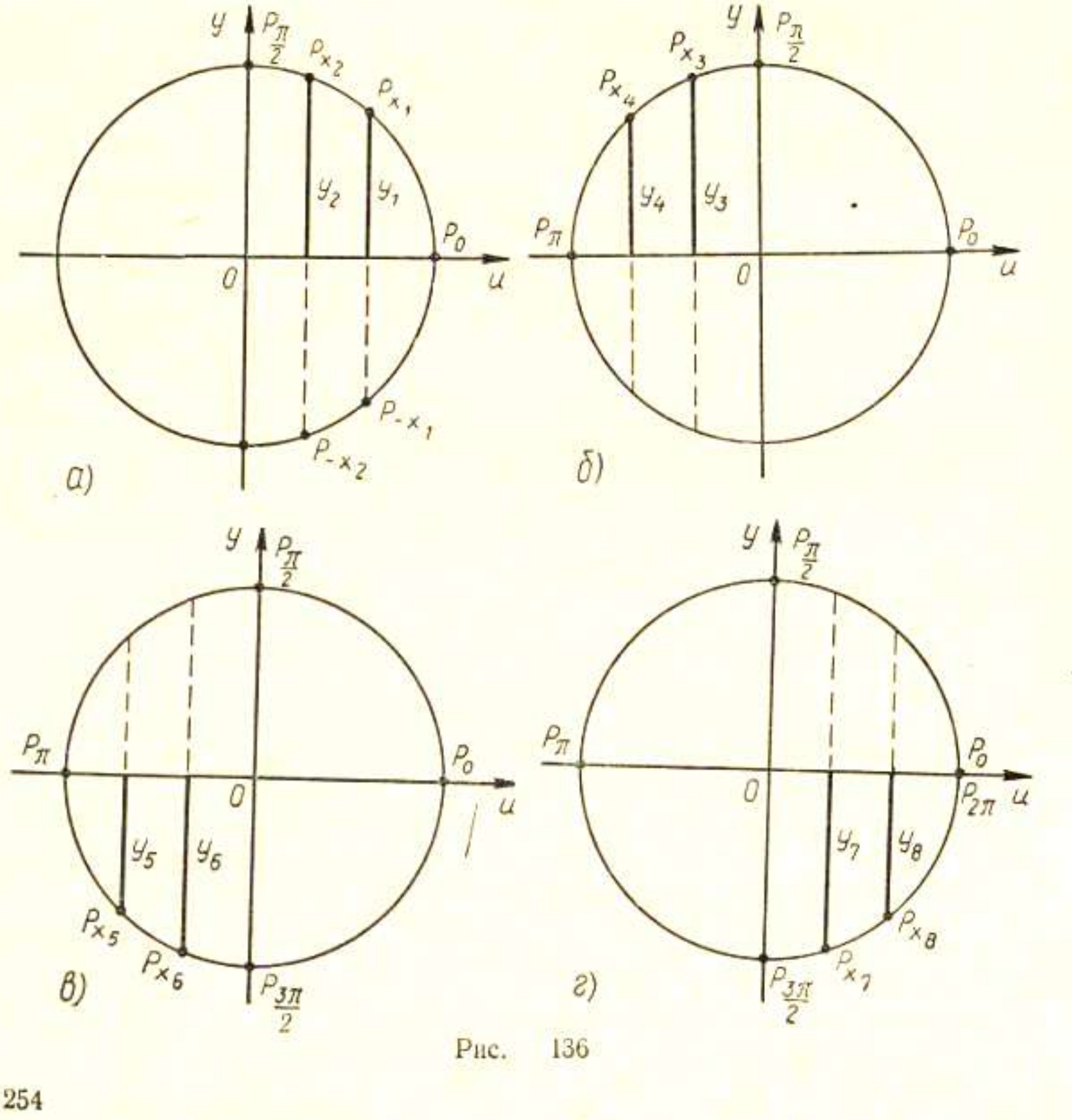

Рис. 136

точки, изображающие значения аргумента x, взятые из промежутка $[0; 2\pi]$ (рис. 136 a—г). Ординаты отмеченных на рисунках 136 а—г точек будут представлять собой значения синусов чисел, изображаемых соответствующими точками P_x, т. е. $y_1 = \sin x_1$, $y_2 = \sin x_2$, $y_3 = \sin x_3$ и т. д.

Из курса геометрии известно, что из всех хорд окружности диаметр имеет наибольшую длину, в нашем случае равную 2, и из двух дуг, меньших полуокружности, бо́льшая из них стягивается большей хордой. Так, на рисунке 136 а $\smile P_{-x_1} P_{x_1}$ меньше $\smile P_{-x_2} P_{x_2}$ и поэтому хорда $P_{-x_1} P_{x_1}$ меньше хорды $P_{-x_2} P_{x_2}$. Так как $|P_{-x_1} P_{x_1}| = 2y_1$ и $|P_{-x_2} P_{x_2}| = 2y_2$, то $2y_1 < 2y_2$ или $y_1 < y_2$. Точно так же получается неравенство $y_3 > y_4$ и, если учесть знаки значений синуса, $y_5 > y_6$ и $y_7 < y_8$ (см., соответственно, рис. 136б, 136в, 136г).

Таким образом, при перемещении точки M по дуге $P_0 P_{\frac{\pi}{2}}$ в положительном направлении ее ордината y будет возрастать от 0 до 1, а это означает, что при увеличении значений аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ значения синуса будут увеличиваться от 0 до 1. Во второй четверти из $x_3 < x_4$ следует $\sin x_3 > \sin x_4$ и при увеличении значений аргумента x от $\frac{\pi}{2}$ до π значения синуса будут уменьшаться от 1 до 0. При $x = \frac{\pi}{2}$ синус достигает своего наибольшего значения (максимума) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. В III и IV четвертях ординаты всех точек, кроме точек P_π и $P_{2\pi}$, отрицательны. Из $x_5 < x_6$ следует $\sin x_5 > \sin x_6$, из $x_7 < x_8$ следует $\sin x_7 < \sin x_8$. В III четверти с возрастанием аргумента x значения синуса убывают от 0 до -1, в IV четверти значения синуса возрастают от -1 до 0. Следовательно, при $x = \frac{3\pi}{2}$ синус достигает своего наименьшего значения (минимума) $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

Напомним основные свойства функции синус, полученные выше:

1. Область определения синуса — множество всех действительных чисел (вся числовая ось).

2. Множество значений синуса — отрезок $[-1, 1]$. Другими словами, синус — ограниченная функция.

3. Синус — нечетная функция, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$ при любом значении аргумента x.

4. Эта функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. равенство $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ справедливо для любого значения аргумента x.

5. Значения этой функции равны нулю для $x = \pi n$, где n — любое целое число.

6. Синус имеет максимумы, равные 1, при всех $x = 2\pi + \frac{\pi}{2}$.

7. Синус имеет минимумы, равные —1, при всех $x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$.

8. При всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n < x < 2\pi n + \pi, \quad \sin x > 0.$$

9. При всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n + \pi < x < 2\pi n + 2\pi, \quad \sin x < 0.$$

В свойствах 6—9 n — любое целое число.

Промежутки, указанные в свойствах 8 и 9, называются *промежутками знакопостоянства синуса*.

График функции синус был построен в п. 94 (рис. 118).

По этому графику можно наглядно представить себе свойства синуса, перечисленные выше. Например, синусоида симметрична относительно начала координат, т. е. если какая-либо точка F принадлежит синусоиде, то точка F_1, ей симметричная относительно начала координат, тоже принадлежит синусоиде. Это справедливо для графиков любых нечетных функций.

В п. 94 приведено геометрическое построение синусоиды. Тот же самый график можно построить при помощи таблицы тригонометрических функций числового аргумента (В. М. Брадис, табл. XII).

Упражнения

741. Построить синусоиду при помощи следующей таблицы:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4,5	5	5,5	6
$\sin x$	0	0,48	0,84	0,997	0,91	0,60	—0,35	—0,76	—0,98	—0,90	—0,71	—0,28

В качестве масштабного отрезка на осях координат взять 1 *см*.

742. Расположить в порядке возрастания числа:

1) $\sin 15°$, $\sin 75°$, $\sin 56°$;
2) $\sin 115°$, $\sin 127°$, $\sin 156°$, $\sin 175°$;
3) $\sin 220°$, $\sin 250°$, $\sin 256°$;
4) $\sin 280°$, $\sin 290°$, $\sin 296°$, $\sin 315°$, $\sin 340°$;
5) $\sin 1$, $\sin 1{,}5$, $\sin 1{,}52$, $\sin 1{,}55$;
6) $\sin 1{,}8$, $\sin 2{,}1$, $\sin 2{,}5$, $\sin 3$;
7) $\sin 3{,}5$, $\sin 4$, $\sin 4{,}2$, $\sin 4{,}4$;
8) $\sin 5$, $\sin 5{,}5$, $\sin 5{,}8$, $\sin 6$.

743. Отметить на графике промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x < -\frac{1}{2}$; в) $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

108. Свойства функции косинус и ее график

Для изучения свойств косинуса достаточно изучить их на одном промежутке длины 2π, например $[0;\ 2\pi]$. Во всех остальных таких промежутках эти свойства будут повторяться.

Докажем следующие свойства косинуса:

1. В I четверти функция строго убывает от 1 до 0.
2. Во II четверти функция строго убывает от 0 до -1.
3. В III четверти функция строго возрастает от -1 до 0.
4. В IV четверти функция строго возрастает от 0 до 1.

Эти свойства могут быть записаны в виде таблицы:

x	0	I четв.	$\frac{\pi}{2}$	II четв.	π	III четв.	$\frac{3\pi}{2}$	IV четв.	2π
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

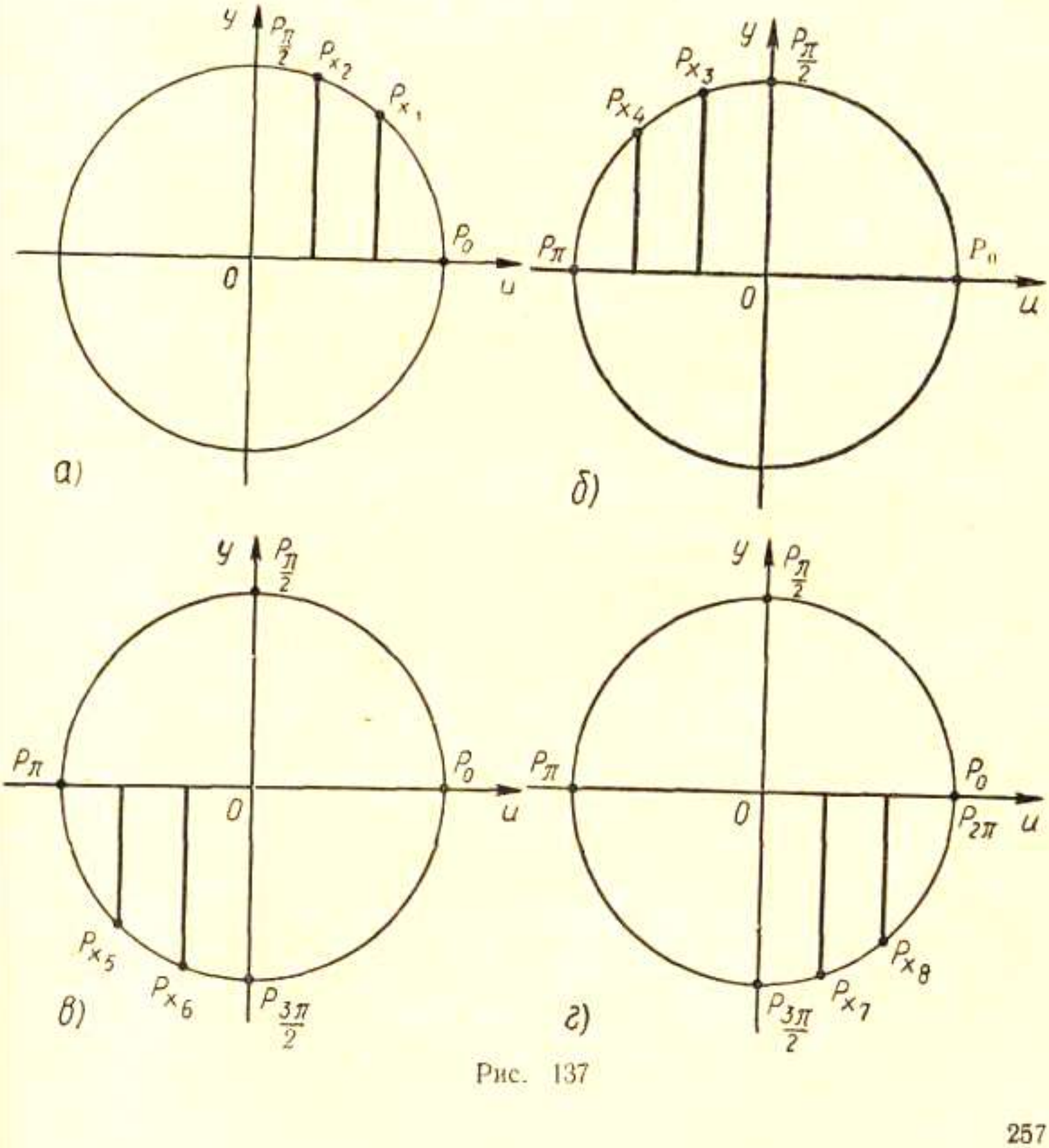

Рис. 137

Для доказательства этих свойств строим единичную окружность с центром в начале координат и на ней будем отмечать точки, изображающие значения аргумента x, взятые из промежутка $[0; 2\pi]$ (см. рис. 137 а—г). Абсциссы отмеченных точек единичной окружности будут представлять собой значения косинуса чисел, изображаемых этими точками. В I четверти с увеличением значений аргумента соответственные значения абсцисс будут уменьшаться, т. е. из $x_2 > x_1$ следует $\cos x_2 < \cos x_1$. Причем если значения аргумента x возрастают от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то значения $\cos x$ убывают от 1 до 0 (рис. 137а). Во II четверти из $x_4 > x_3$ следует $\cos x_4 < \cos x_3$, т. е. при возрастании значений аргумента x от $\frac{\pi}{2}$ до π значения $\cos x$ становятся отрицательными, убывая от 0 до -1 (рис. 137б). В III и IV четвертях с возрастанием значений аргумента x от π до 2π значения $\cos x$ возрастают от -1 до 1 (рис. 137 в и г). Убедиться в последнем выводе представляется самим читателям.

Напомним основные свойства функции косинус, установленные ранее:

1. Область определения косинуса — вся действительная ось.

2. Множество значений функции —отрезок $[-1,1]$, т. е. эта функция ограничена.

3. Косинус — функция четная, т. е. $\cos(-x) = \cos x$ для любого значения x.

4. Значения функции равны нулю при всех $x = \pi n + \frac{\pi}{2}$.

5. Косинус — функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π.

6. Косинус имеет максимумы, равные 1, при всех $x = 2\pi n$.

7. Косинус имеет минимумы, равные -1, при всех $x = 2\pi n + \pi$.

8. При всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < 2\pi n + \frac{\pi}{2},$$

имеем: $\cos x > 0$.

9. При всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n + \frac{\pi}{2} < x < 2\pi n + \frac{3\pi}{2},$$

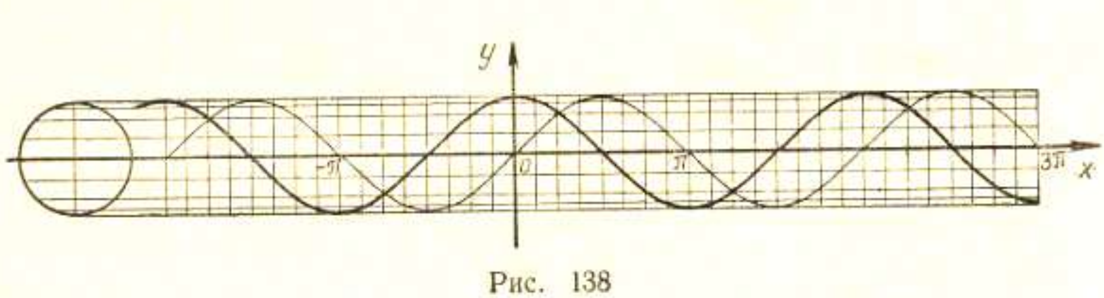

Рис. 138

имеем:

$$\cos x < 0.$$

В свойствах 4,6—9 n—любое целое число.

Промежутки, указанные в свойствах 8 и 9, являются *промежутками знакопостоянства косинуса.*

По графику косинуса (рис. 121) можно наглядно представить себе все свойства этой функции, перечисленные выше. Например, этот график симметричен относительно оси ординат. Это свойство графиков справедливо для всех четных функций.

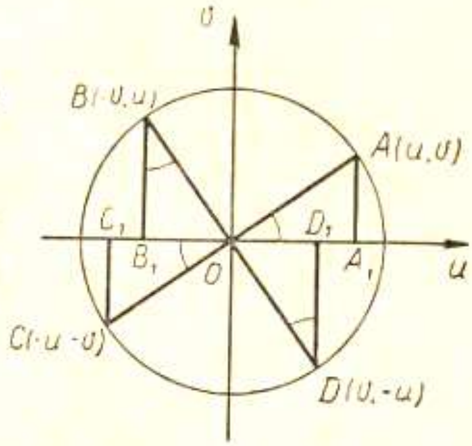

Рис. 139

Если мы построим графики синуса и косинуса в одной и той же системе координат, как это показано на рисунке 138, то увидим, что они отличаются друг от друга только тем, что имеют различное расположение относительно системы координат. Так, если синусоиду сдвинем в отрицательном направлении оси абсцисс на отрезок длины $\frac{\pi}{2}$, то получим график косинуса. Это следует из того, что при любом значении аргумента x выполняются равенства

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \text{ и } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

Для доказательства последних утверждений на единичной окружности (рис. 139) произвольно выбираем четыре точки, делящие ее на четыре равные части. Из равенства треугольников OA_1A, BB_1O, OC_1C и DD_1O следует, что если координаты точки A обозначим через u и v, т. е. положим $A\ (u,\ v)$, то остальные точки будут иметь следующие координаты: $B\ (-v,\ u)$, $C\ (-u,\ -v)$ и $D\ (v,\ -u)$. Это показывает, что при переходе от любой из отмеченных точек к соседней в положительном направлении (против часовой стрелки) абсцисса каждой точки становится ординатой следующей, а ордината каждой меняет свой знак и становится абсциссой следующей точки. Если какая-либо из отмеченных точек изображает число x, то ее координатами будут числа $\cos x$, $\sin x$. Тогда следующая за ней в положительном направлении точка, по доказанному, будет иметь координаты $-\sin x$, $\cos x$. Но эта соседняя точка изображает число $x+\frac{\pi}{2}$, и поэтому ее координатами будут числа $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Так как числа $-\sin x$, $\cos x$ и $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ являются координатами одной и той же точки, то отсюда и следуют равенства

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \text{ и } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

справедливые при любом значении аргумента x.

Таким образом, *графиком косинуса является синусоида, сдвинутая в отрицательном направлении оси абсцисс на отрезок длины, равной* $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, если построена синусоида, то вышеуказанным способом из нее легко получается график косинуса. Еще проще сдвинуть вправо систему координат на отрезок длины $\frac{\pi}{2}$.

Примеры.

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};\quad \cos\frac{5\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

744. Расположить в порядке возрастания числа:

1) $\cos 15°$, $\cos 75°$, $\cos 140°$, $\cos 230°$, $\cos 280°$, $\cos 1000°$;

2) $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 5$, $\cos 5{,}3$, $\cos 5{,}8$.

745. Отметить по графику косинуса промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\cos x > \frac{1}{2}$; б) $\cos x < -\frac{1}{2}$; в) $\cos x = \frac{3}{4}$; г) $|\cos x| < \frac{1}{2}$; д) $|\cos x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

109. Свойства тангенса и график этой функции

Для изучения свойств тангенса достаточно изучить их в промежутке длины π (π — период функции тангенс), например в промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Во всех остальных таких промежутках эти свойства будут повторяться. Мы выбрали для изучения интервал $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, исключив его концы $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, так как функция tg в этих точках не определена.

Эта функция обладает следующими свойствами:

1. Область определения тангенса — множество всех действительных чисел, за исключением всех чисел вида $\pi n+\frac{\pi}{2}$ при любом целом n.

2. Область значений этой функции — множество всех действительных чисел, т. е. тангенс — неограниченная функция.

3. Тангенс — нечетная функция, т. е. $\operatorname{tg}(-x)=\operatorname{tg} x$ для любого значения аргумента из области определения.

4. Эта функция периодическая, с наименьшим положительным периодом π.

5. Значения тангенса равны нулю во всех точках $x = \pi n$ при любом целом n.

6. Тангенс не имеет ни максимумов, ни минимумов.

7. При всех x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \pi n$, n-любое целое число, $\operatorname{tg} x < 0$.

8. При всех x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n < x < \pi n + \frac{\pi}{2}$, где n—любое целое число, $\operatorname{tg} x > 0$.

Эти свойства были установлены ранее, кроме них существенно свойство:

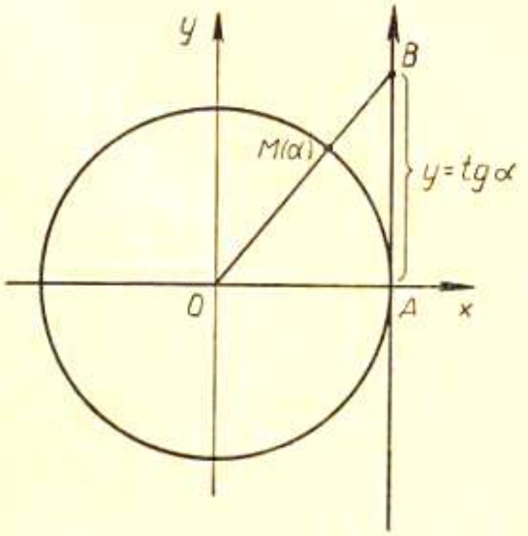

Рис. 140

9. На промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ тангенс строго возрастает, пробегая все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Последнее свойство вытекает из того, что при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ луч, исходящий из начала координат O и проходящий через точку $M(\alpha)$ единичной окружности, пересекает линию тангенсов в точке B и соответствие (рис. 140)

$$\alpha \mapsto M(\alpha) \mapsto B$$

таково, что при возрастании α точка B перемещается по линии тангенсов снизу вверх, пробегая ее полностью.

При приближении α к $-\frac{\pi}{2}$ или к $\frac{\pi}{2}$ модуль значения тангенса неограниченно возрастает, или, как говорят, «стремится к бесконечности».

Для построения графика тангенса строим единичную окружность с центром на оси абсцисс, как показано на рисунке 141, и проводим линию тангенсов AB. Затем делим промежуток $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ оси абсцисс и правую полуокружность (рис. 141) на одинаковое число равных частей (на рис. 141 на 8 частей) и проводим лучи из центра окружности через точки деления до их пересечения с осью тангенсов. Через полученные точки проводим прямые параллельно оси абсцисс. Точки их пересечения с прямыми, проведенными через соответствующие точки деления промежутка $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ параллельно оси ординат, принадлежат графику функции тангенса. Соединяем эти точки плавной линией, получаем приближенное

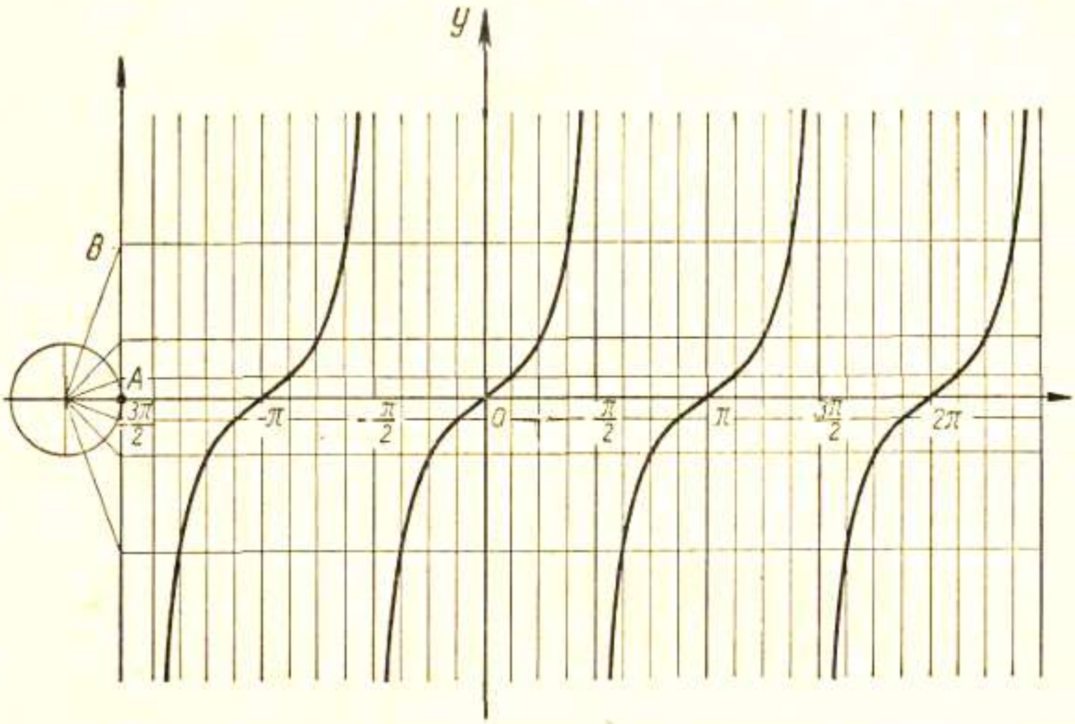

Рис. 141

изображение графика в промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Аналогично строится график функции тангенс в других промежутках длины π, например $\left]-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[$ и др. Говорят, что тангенс в точках $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ и т. п. имеет разрывы. В каждом из промежутков оси абсцисс между двумя соседними точками разрыва тангенс возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Упражнения

746. Отметить по графику тангенса промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\operatorname{tg} x > 1$; б) $\operatorname{tg} x < -1$; в) $|\operatorname{tg} x| < 1$.

110. Свойства котангенса и график этой функции

Так же как и для тангенса, свойства котангенса достаточно изучить в любом промежутке длины π (π — период котангенса), например $]0; \pi[$.

Перечислим основные свойства котангенса:

1. Область определения котангенса — множество всех действительных чисел, из которого надо исключать все числа πn при любом целом значении n.

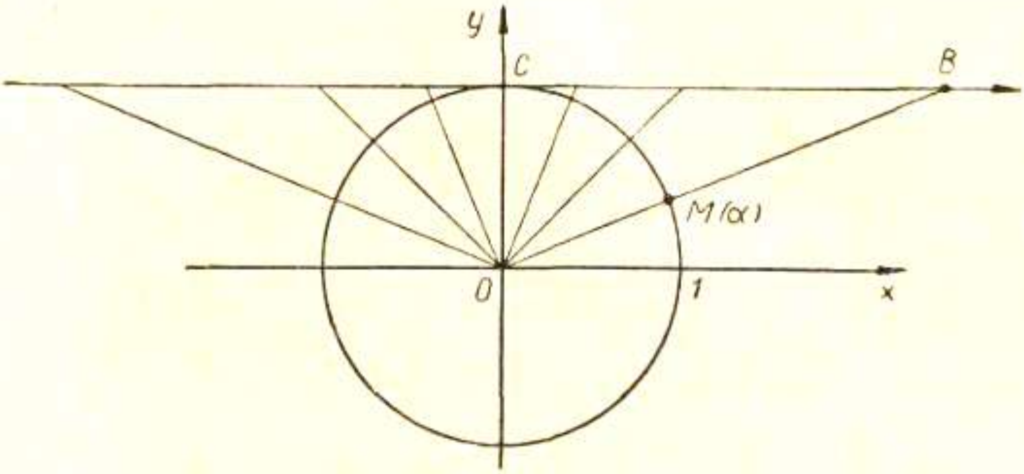

Рис. 142

2. Множество значений — множество всех действительных чисел, т. е. котангенс — неограниченная функция.

3. Котангенс — функция нечетная.

4. Котангенс — функция периодическая, с наименьшим положительным периодом π.

5. Значения котангенса равны нулю во всех точках $\pi n + \frac{\pi}{2}$ при любом целом значении n.

6. Котангенс не имеет ни максимумов, ни минимумов.

7. При всех значениях аргумента x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n < x < \pi n + \frac{\pi}{2}$, где n — любое целое число, $\operatorname{ctg} x > 0$.

8. При всех значениях аргумента x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n + \frac{\pi}{2} < x < \pi n + \pi$, где n — любое целое число, $\operatorname{ctg} x < 0$.

9. В промежутке $]0; \pi[$ котангенс строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

Свойства 7—9 легко обосновываются с помощью соответствия

$$\alpha \mapsto M(\alpha) \mapsto B \quad \text{(рис. 142)}$$

между числом α в пределах $0 < \alpha < \pi$, точкой $M(\alpha)$ на единичной окружности и точкой B пересечения луча OM с осью котангенсов. Значение $\operatorname{ctg} \alpha$ равно длине отрезка CB с учетом его знака.

Для построения графика котангенса рассмотрим единичную окружность с центром на оси абсцисс. Начало отсчета на этой окружности выберем в точке C (рис. 143). Тогда линия котангенсов будет касаться окружности в точке C и ее положительное направление совпадает с положительным направлением оси ординат. Дальнейшее построение такое же, как и для тангенса, что показано на рисунке 143.

Впрочем, график котангенса можно получить из графика тангенса следующим образом:

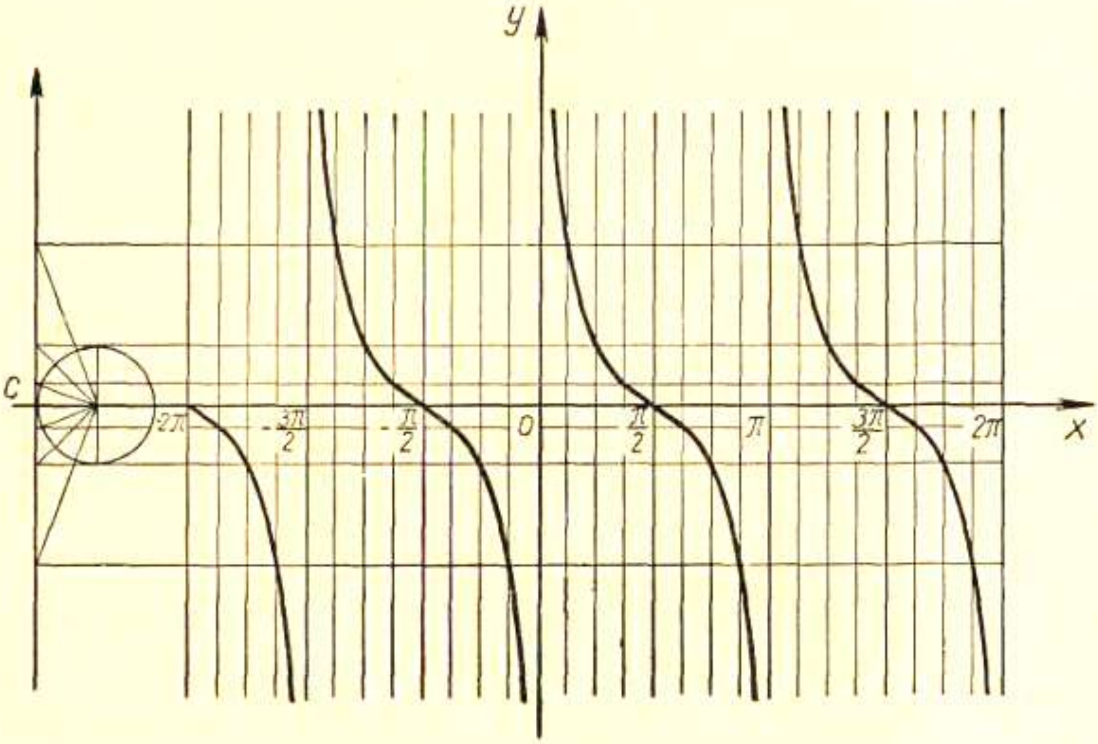

Рис. 143

1. С помощью формул

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \text{ и } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

полученных в пункте 108, найдем:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\operatorname{ctg} x.$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

2. Если сдвинуть график тангенса влево на отрезок, равный $\frac{\pi}{2}$, получим график функции, определяемой уравнением

$$y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Построив график, симметричный относительно оси абсцисс сдвинутому графику тангенса, получим искомый график котангенса.