§ 19. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов

111. Сложение поворотов и преобразование координат вектора при повороте системы координат

Если повернуть луч или вектор сначала на угол α, а потом на угол β, то конечный результат будет тем же самым, как при повороте на угол

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Например, поворот на угол 500° с последующим поворотом на угол —550° даст тот же результат, как поворот на —50°.

В п. 98 мы получили представление вектора $\vec{a}$ в виде

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}, \qquad (1)$$

которое для единичного вектора $\vec{e}$, образующего угол α с осью абсцисс, приобретает вид

$$\vec{e} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin a \cdot \vec{j}. \qquad (2)$$

Повернем оси координат Ox и Oy на угол α вокруг точки O. Обозначим новые оси через Ou и Ov (рис. 144), а орты новых осей через $\vec{i}_1$ и $\vec{j}_1$. Орт $\vec{i}_1$ образует с осью Ox угол α, и поэтому он через орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ старых осей выражается равенством

$$\vec{i}_1 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}. \qquad (3)$$

Орт $\vec{j}_1$ образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{2} + \alpha$, так как орт $\vec{i}$ после поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ переходит в орт $\vec{j}$, а при последующем повороте на угол α — в орт $\vec{j}_1$. Поэтому получаем:

$$\vec{j}_1 = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}.$$

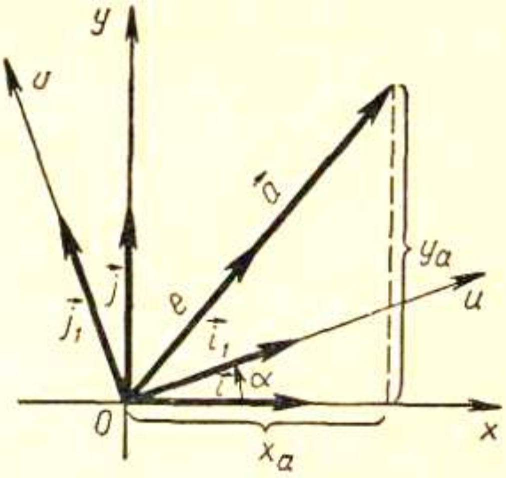

Рис. 144

В п. 108 было установлено, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ и $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$ $=-\sin x$. Следовательно, выражение для орта $\vec{j}_1$ принимает вид:

$$\vec{j}_1=-\sin\alpha\cdot\vec{i}+\cos\alpha\cdot\vec{j}. \tag{4}$$

Поставим задачу: выразить координаты x_a и y_a вектора $\vec{a}$ в системе координат xOy через его координаты u_a и v_a в новой системе координат uOv.

В этой системе координат имеем для вектора $\vec{a}$ выражение

$$\vec{a}=u_a\cdot\vec{i}_1+v_a\cdot\vec{j}_1. \tag{5}$$

Подставляя в последнее равенство вместо ортов $\vec{i}_1$ и $\vec{j}_1$ их выражения (3) и (4), получим:

$$\vec{a}=u_a(\cos\alpha\cdot\vec{i}+\sin\alpha\cdot\vec{j})+v_a(-\sin\alpha\cdot\vec{i}+\cos\alpha\cdot\vec{j}),$$

или

$$\vec{a}=(\cos\alpha\cdot u_a-\sin\alpha\cdot v_a)\,\vec{i}+(\sin\alpha\cdot u_a+\cos\alpha\cdot v_a)\,\vec{j}. \tag{6}$$

Так как вектор $\vec{a}$ выражается через орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ единственным образом, то, сравнивая выражения (1) и (6), приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} x_a&=\cos\alpha\cdot u_a-\sin\alpha\cdot v_a,\\ y_a&=\sin\alpha\cdot u_a+\cos\alpha\cdot v_a. \end{aligned} \tag{7}$$

Формулы (7) и являются решением поставленной задачи.

112. Синус и косинус суммы и разности

Пусть ось Ou наклонена к оси Ox под углом α, а единичный вектор $\vec{e}$ образует с осью Ou (рис. 145) угол β. Тогда этот вектор с осью Ox образует угол $\alpha+\beta$. Для вектора $\vec{e}$ имеем:

$$\begin{aligned} &x_e=\cos(\alpha+\beta);\quad y_e=\sin(\alpha+\beta);\\ &u_e=\cos\beta;\quad v_e=\sin\beta. \end{aligned} \tag{8}$$

Поэтому для вектора $\vec{e}$ формулы (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} x_e&=\cos\alpha\, u_e-\sin\alpha\, v_e,\\ y_e&=\sin\alpha\, u_e+\cos\alpha\, v_e. \end{aligned} \tag{9}$$

Применяя к последним равенствам формулы (8), получаем:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{10}$$

Формулы (10) справедливы для любых углов, а следовательно, и для любых действительных чисел и дуг окружности.

Если в формулах (10) произвести замену β на $-\beta$ и учесть свойства четности косинуса и нечетности синуса, то получатся формулы для синуса и косинуса разности двух аргументов:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \quad (11)$$

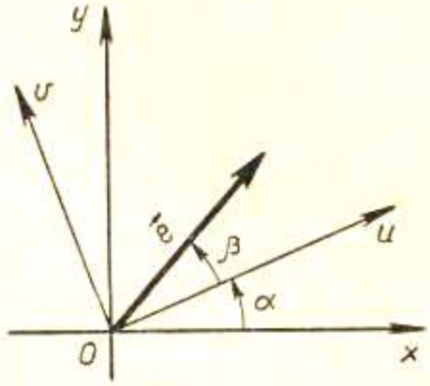

Рис. 145

В частности, из формулы для $\cos(\alpha-\beta)$ при $\alpha=\beta$ получится известная формула:

$$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$$

Пример. Вычислить $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\operatorname{tg} 15^\circ$, $\operatorname{ctg} 15^\circ$.

Решение. Известно, что

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

Для решения данного примера воспользуемся формулами синуса и косинуса разности двух углов: $15^\circ=60^\circ-45^\circ$,

$$\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1);$$

$$\cos 15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\cdot\sin 45^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1);$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$

Примечание. Для решения этого примера можно было бы также воспользоваться равенством $15^\circ=45^\circ-30^\circ$.

Упражнения

748. Доказать, что $\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

749. Вычислить $\cos 43^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ$.

750. Вычислить $\sin 56^\circ\cdot\cos 34^\circ+\cos 56^\circ\cdot\sin 34^\circ$.

751. Вычислить $\sin 57^\circ\cdot\cos 12^\circ-\cos 57^\circ\cdot\sin 12^\circ$.

752. Вычислить $\sin 104^\circ\cdot\cos 14^\circ-\cos 104^\circ\cdot\sin 14^\circ$.

753. Вычислить $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\operatorname{tg} 75^\circ$, $\operatorname{ctg} 75^\circ$.

754. Вычислить $\sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$, $\operatorname{ctg} 105^\circ$.

755. Доказать справедливость равенств:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

д) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; е) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$;

ж) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$. з) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

756. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и α в III четверти, а β в IV четверти.

757. Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\cos\beta=\frac{8}{17}$ и α в III четверти, а β в I четверти.

758. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ и α в I четверти, а β в III четверти.

759. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$, $\sin\beta=\frac{40}{41}$ и α в III четверти, а β во II четверти.

760. Вычислить $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{20}{29}$, $\cos\beta=-\frac{7}{25}$ и α и β во II четверти.

761. Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ и α во II четверти, а β в IV четверти.

Упростить следующие выражения:

762. $\sin(\alpha+60^\circ)+\sin(\alpha-60^\circ)$.

763. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

764. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

765. $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

766. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

767. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$.

768. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.