В. Н. Калинина В. Ф. Панкин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ББК 22.172
К17
УДК 519.2

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. В. Л. Тамбовцев (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова) и препод. Я. К. Колде (Таллиннский экономический техникум)

Калинина В. Н., Панкин В. Ф.

К17 Математическая статистика: Учеб. для техникумов.— М.: Высш. шк., 1994.— 336 с.: ил.
ISBN 5-06-002318-4

Учебник содержит наиболее важные разделы математической статистики: оценивание числовых характеристик и закона распределения случайной величины, проверку гипотез, дисперсионный и корреляционно-регрессионный анализ, а также необходимые для понимания этих разделов сведения по теории вероятностей. Приведены примеры и упражнения, их разбор и решения, графические иллюстрации. В учебник включены вопросы статистического моделирования случайных величин и систем массового обслуживания на ЭВМ, широко используемого специалистами, работающими в области программирования и использования ЭВМ.

$К\frac{4306020500 — 086}{001(01) — 94}$ 88 — 94

ББК 22.172
517.8

ISBN 5-06-002318-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник написан в соответствии с программой курса «Математическая статистика», утвержденной для специальности «Программирование для быстродействующих математических машин».

Цель курса — изложить основы теории вероятностей и математической статистики, изучающей закономерности массовых случайных явлений. В книге рассматриваются важнейшие методы и приемы обработки результатов наблюдений, знание которых необходимо современному программисту при разработке алгоритмов решения практических задач. Уделяется внимание широко используемому на ЭВМ методу статистических испытаний; приводится пример моделирования системы массового обслуживания.

Данные в учебнике задачи не только разъясняют общетеоретические положения, но и наглядно иллюстрируют возможные области приложения математической статистики. Многие задачи основываются на решении конкретных инженерных, экономических и исследовательских вопросов, поэтому к ним следует отнестись с должным вниманием.

Введение, гл. 9—13 и § 6.5 написаны В. Н. Калининой, гл. 1—8 — В. Ф. Панкиным.

Авторы выражают благодарность В. Л. Тамбовцеву и Я. К. Колде за рецензирование рукописи книги и научному редактору проф. В. Н. Гудкову. Сделанные ими замечания способствовали улучшению книги. Авторы также будут признательны всем, кто пришлет свои критические замечания и пожелания, направленные на улучшение книги.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Цель науки — описание, объяснение и предсказание явлений действительности на основе установленных законов, что позволяет находить решения в типичных ситуациях.

В основе научных знаний лежит наблюдение. Для обнаружения общей закономерности, которой подчиняется явление, необходимо многократно его наблюдать в одинаковых условиях. Чем это вызвано и что понимать под одинаковыми условиями?

Многие явления окружающего мира взаимно связаны и влияют одно на другое. Проследить все связи и определить влияние каждой из них на явление не всегда представляется возможным. Поэтому ограничиваются изучением влияния лишь основных факторов, определяющих течение явления. Под одинаковыми условиями наблюдений и понимается соблюдение во всех наблюдениях практически одинаковых значений основных факторов.

Рассмотрим пример. Станок, хорошо отлаженный в начале работы, со временем теряет настройку, режущий инструмент затупляется, что и приводит к ухудшению качества обработки изделий. Поставлена задача — определить момент, когда следует остановить станок и провести его подналадку или сменить инструмент. Для определения этого момента проверяют качество изготовленных деталей. Наблюдение, проведенное после двух часов работы станка, показало, что изделие не отвечает установленным требованиям. Причиной может быть качество заготовки, случайные изменения режима работы станка. По единичному замеру нельзя принимать решение об остановке станка. Нужны дополнительные замеры. Сколько должно быть проведено наблюдений? Как обработать результаты наблюдений и сделать обоснованные практические выводы? Получить ответы на эти вопросы позволяет математическая статистика.

Рассмотрим еще один пример. Исследователя интересует зависимость урожайности определенной культуры от количества внесенных удобрений и качества обработки почвы. Для выяснения этой зависимости собраны сведения об урожайности, количестве внесенных удобрений и качестве обработки по достаточно большому числу одинаковых участков (примерно с одинаковыми почвами, климатическими условиями, организацией работы по сбору урожая и т. д.). Как, используя эти сведения, количественно оценить складывающуюся в среднем зависимость урожайности от количества внесенных удобрений и качества обработки почвы и использовать ее для предвидения урожайности? На этот вопрос также дает ответ математическая статистика.

Для широкого круга явлений при сохранении постоянными основных условий испытаний отмечается неоднозначность полученных результатов. Примером таких случайных явлений служат погрешности измерений. Измеряя один и тот же предмет, например взвешивая его на аналитических весах много раз, получают близкие, но все же различные результаты. Это объясняется тем, что результат каждого измерения содержит случайную погрешность. Предвидеть эту погрешность, а следовательно, и результат каждого конкретного измерения нельзя. Однако если определенным образом систематизировать результаты измерений, то окажется, что в их изменении можно увидеть некоторую закономерность — статистическую устойчивость. Изучение этой закономерности позволяет, например, предвидеть в среднем результат серии измерений.

Математическая статистика — наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, закономерностью, с целью выявления этой закономерности. Выводы о закономерностях, которым подчиняются явления, изучаемые методами математической статистики, всегда основываются на ограниченном, выборочном числе наблюдений. При большем числе наблюдений эти выводы могут оказаться иными. Для вынесения более определенного заключения о закономерностях явления математическая статистика опирается на теорию вероятностей.

В отличие от математической статистики, имеющей дело с результатами наблюдений случайных явлений, теория вероятностей формально — логически изучает закономерности случайных явлений и имеет дело с математическими моделями случайных явлений. Обработав результаты наблюдений, исследователь выдвигает ряд гипотез, предположений о том, что рассматриваемое явление можно описать той или иной вероятностной теоретической моделью. Далее, используя математико-статистические методы, можно дать ответ на вопрос, какую из гипотез или моделей следует принять. Именно эта модель и считается закономерностью изучаемого явления. Правомерен такой вывод или нет, покажет практика использования выбранной модели. Таков типичный путь математико-статистического исследования.

Математическая статистика, опираясь на вероятностные модели, в свою очередь, влияет на развитие теории вероятностей. Окружающий нас мир многообразен, и задачи, возникающие при изучении тех или иных случайных явлений, при обработке результатов наблюдений над ними требуют разработки новых вероятностных моделей. Математическая статистика и теория вероятностей — две неразрывно связанные науки.

ЧАСТЬ I
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ

ГЛАВА 1
РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ

§ 1.1. Правило умножения и сложения

Установим два важных правила, которые часто применяются при решении комбинаторных задач. Для этого рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 1.1. Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать три задачи. Одна задача выбирается из любого параграфа I гл. сборника задач, вторая — из любого параграфа II гл., а последняя — из любого параграфа III гл. При этом следует учесть, что I и III гл. содержат два параграфа, а II гл. — три параграфа. Сколько видов контрольной работы можно составить исходя из этих условий, если вид работы определяется только номерами параграфов, из которых выбраны задачи?

△ Задачу решим двумя способами.

Способ 1. Пусть каждой задаче соответствует двузначное число, где первая цифра соответствует номеру выбранной главы, а вторая — номеру параграфа. Чтобы не допустить ошибки при подсчете, воспользуемся специальным *графом*, который иногда называют *деревом* (рис. 1.1).

Начальную точку обозначим буквой O. Двигаясь всеми возможными путями по ребрам графа слева направо,

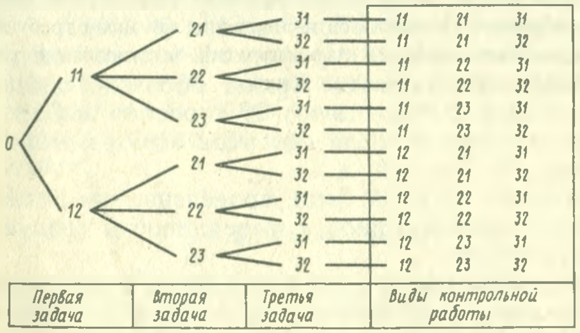

Рис. 1.1

начиная с точки O получим 12 различных видов контрольной работы.

Способ 2. В задаче требуется для каждого вида контрольной работы подобрать три параграфа по одному из указанных трех глав, т. е. следует заполнить три клетки на карточке для контрольной работы. Изобразим эти клетки следующим образом: $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

В первую клетку можно поместить либо 11, либо 12. Поэтому первую клетку можно заполнить двумя способами: $\boxed{2}\boxed{}\boxed{}$. На «дереве» это обстоятельство иллюстрируется двумя ветвями, исходящими из точки O и ведущими к столбцу «Первая задача». Для каждого из двух способов заполнения первой клетки имеется три варианта заполнения второй клетки, так как вторую задачу можно выбрать тремя способами, поскольку гл. II содержит три параграфа: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{}$

Первые две клетки можно заполнить шестью способами: $2\cdot3=6$. Заметим, что именно 6 ветвей заканчиваются в столбце «Вторая задача». Для каждого из этих шести способов существует два способа заполнения третьей клетки, так как третья задача может быть выбрана из двух параграфов гл. III: $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}$

Тогда общее число способов заполнения трех клеток равно $2\cdot3\cdot2=12$. Именно столько ветвей заканчивается в столбце «Третья задача». Таким образом, исходя из условий задачи, можно составить 12 различных видов контрольной работы. ▲

Задача 1.2. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать?

△ Старостой может быть выбран любой из 30 учащихся, т. е. существует 30 способов выбора старосты. После того как староста уже выбран, профоргом можно выбрать любого из оставшихся 29 учащихся. Таким образом, одному способу выбора старосты соответствуют 29 способов выбора профорга. Следовательно, общее число способов выбора старосты и профорга равно $30\cdot29=870$. ▲

Рассуждения, которые были проведены при решении предыдущих задач, подтверждают справедливость следующего простого утверждения.

Правило умножения. *Пусть требуется выполнить одно за другим какие-то k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами, третье — n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ способами.*

Это правило дает удобный универсальный метод решения многих комбинаторных задач.

Задача 1.3. Четыре мальчика и четыре девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки — не места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

△ Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй — на любое из оставшихся трех мест, третий — на любое из оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения, мальчики могут занять четыре места $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья $24\cdot24=576$ способами. ▲

Задача 1.4. Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать два изделия одного сорта. Сколько способов выбора двух изделий возможно в данной ситуации, если учитывается порядок выбора изделий?

△ Условимся первым действием считать выбор изделий 1-го, вторым — выбор изделий 2-го сорта. По правилу умножения два изделия 1-го сорта можно выбрать $20\cdot19=380$ способами. Аналогично, два изделия 2-го сорта можно выбрать $30\cdot29=870$ способами. Согласно условию задачи следует выбрать два изделия одного сорта, не важно какого. Это могут быть либо изделия 1-го сорта, либо изделия 2-го сорта. Таким образом, должно быть выполнено либо первое действие, либо второе, но не первое действие, а затем второе. Эти действия не могут быть выполнены одновременно, поскольку они взаимно исключают друг друга. Поэтому общее число способов выбора изделий одного сорта равно $380+870=1250$. ▲

Соображения, которые были приведены при решении последней задачи, позволяют сформулировать правило сложения.

Правило сложения. *Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить m способами, а другое — n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n+m$ способами.*

Это правило легко распространить на любое конечное число действий.

§ 1.2. Размещения

Пусть имеется некоторое множество, содержащее конечное число членов. Например, множество учебных групп в техникуме, множество книг на полке, множество населенных формула (1.1) принимает вид $A_n^m = n!/0!$, а формула (1.2) — следующий вид: $A_n^n = n!$. В дальнейшем будем считать $0! = 1$, что позволяет использовать формулу (1.1) для случая $n = m$.

Задача 1.6. Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все десять цифр?

△ Так как в любом числе важную роль играет порядок входящих в него цифр, то для ответа на поставленный вопрос, очевидно, следует определить число размещений из 10 цифр по 4:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

Однако не все последовательности из 4 цифр представляют собой четырехзначное число, поскольку среди них есть и такие, у которых на 1-м месте находится 0. Найдем число таких последовательностей. Так как у рассматриваемых последовательностей на 1-м месте уже стоит 0, то следует выбрать еще 3 цифры из оставшихся 9. Найдем число размещений из 9 по 3: $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Таким образом, искомое число четырехзначных чисел равно разности $A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536$. ▲

§ 1.3. Перестановки

Рассмотрим теперь отдельно случай, когда $m = n$. Соответствующие этому случаю размещения называются *перестановками*.

Определение. *Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество, в которое входят по одному разу все n различных элементов данного множества.*

○ **Пример 1.3.** Пусть имеются числа 3, 5, 7. Этому множеству чисел соответствует 6 перестановок: 357; 375; 537; 573; 753; 735. ●

○ **Пример 1.4.** Слова «барк» и «краб» образованы в результате перестановки букв, составляющих слово «брак». Число таких перестановок равно 24, так как

$$A_4^4 = \frac{4!}{0!} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24. \; ●$$

Отметим, что перестановки состоят из одних и тех же элементов, но отличающихся между собой порядком. Число перестановок n различных элементов будем обозначать символом P_n.

Теорема. *Число перестановок n различных элементов равно $n!$, т. е.*

$$P_n = n! \qquad (1.3)$$

□ Так как перестановки являются частным случаем размещений, то при $n = m$ получаем $P_n = A_n^n = n!/0! = n!$ ■

Задача 1.7. Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

△ *Способ* 1. Будем считать выделенные книги за одну книгу. Тогда для шести книг существует $P_6 = 6! = 720$ перестановок. Однако четыре определенные книги можно переставить между собой $P_4 = 4! = 24$ способами. По правилу умножения имеем $P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17\,280$.

Способ 2. Возможны следующие случаи: первая из четырех книг стоит на 1-м месте, тогда четвертая стоит на 4-м месте; первая книга стоит на 2-м месте, а четвертая стоит на 5-м, первая стоит на 6-м месте, тогда четвертая стоит на последнем, 9-м месте. Число таких случаев равно шести. Сами книги могут быть переставлены $P_4 = 4! = 24$ способами. Значит, по правилу умножения выделенные четыре книги можно расставить $6 \cdot P_4 = 144$ способами. Оставшиеся пять книг можно переставить $P_5 = 5! = 120$ способами. Воспользовавшись снова правилом умножения, приходим к тому же результату, который был получен при первом способе решения: $P_4 \cdot 6 \cdot P_5 = P_4 \cdot P_6 = 17\,280$. ▲

§ 1.4. Сочетания

Если два различных размещения состоят из одинаковых элементов некоторого множества, то они обязательно отличаются порядком входящих в них элементов. Иногда возникает необходимость не учитывать порядок элементов, входящих в размещение. В этом случае все $m!$ размещений, которые состоят из одних и тех же m элементов, считаются неразличимыми.

Предположим, что из чисел 3, 5, 7 необходимо составить различные произведения двух чисел. Таких произведений только три, а именно: $3 \cdot 5 = 15$; $3 \cdot 7 = 21$; $5 \cdot 7 = 35$. Это объясняется тем, что произведения вида $3 \cdot 5$ и $5 \cdot 3$ совпадают, так как порядок сомножителей, входящих в произведение, не учитывается. Если требуется из указанных цифр составить двузначные числа, то таких чисел уже шесть. Запишем эти числа: 35, 53, 37, 73, 57, 75. Как видно, здесь уже пришлось учитывать порядок цифр.

При выборе делегации в составе 3 человек из 30 учащихся, очевидно, не надо учитывать порядок выбранных делегатов, так как все члены делегации равноправны. Однако, выбирая физорга, старосту, профорга из тех же учащихся, порядок уже приходится учитывать. Каждый конкретный результат выбора из 30 учащихся делегации в составе 3 человек — это сочетание из 30 по 3 в отличие от размещения из 30 по 3.

Определение. *Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов.*

○ **Пример 1.5.** Пусть имеется множество, содержащее четыре буквы: $\{A, B, C, D\}$. Запишем все возможные сочетания из указанных букв по три. Таких сочетаний будет четыре: ABC; ACD; ABD; BCD. Здесь в число сочетаний не включены, например, ACB, BCA, так как эти последовательности букв не отличаются от последовательности ABC, поскольку порядок элементов в сочетаниях не учитывается.

Число сочетаний из n различных элементов по m будем обозначать символом C_n^m, где $m \leqslant n$. Иногда это число обозначают символом $\binom{n}{m}$. ●

Прежде чем найти общую формулу для определения числа сочетаний, решим следующую задачу.

Задача 1.8. Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

△ Из смысла задачи следует, что порядок выбора книг не играет роли. Здесь важен только их состав. Как известно из предыдущего (см. задачу 1.6), число размещений из 10 по 4 равно $A_{10}^4 = 5040$. Пусть теперь выбраны 4 книги из 10. Число таких возможных выборов, где не учитывается порядок выбранных книг, равно C_{10}^4. Однако каждому из этих сочетаний (выборов) будут соответствовать $P_4 = 24$ перестановки выбранных книг. Тогда выбор 4 книг из 10 с учетом их порядка по правилу умножения возможен $C_{10}^4 \cdot P_4$ способами. С другой стороны, число указанных способов — это число размещений A_{10}^4. Таким образом, $A_{10}^4 = C_{10}^4 P_4$, откуда имеем $C_{10}^4 = A_{10}^4 / P_4 = 5040/24 = 210$. Таким образом, число возможных способов выбора подарка равно 210. ▲

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по m равно* $\dfrac{n!}{m!(n-m)}$, *т. е.*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.4}$$

□ Чтобы получить размещение из n элементов по m, а их число равно A_n^m, надо выбрать m элементов из множества, содержащего n элементов, что можно сделать C_n^m способами, и организовать из них упорядоченное подмножество. Последнюю операцию можно выполнить P_m способами. Таким образом, чтобы получить A_n^m размещений, надо выполнить две операции, которые можно осуществить C_n^m и P_m способами соответственно. Поэтому, согласно правилу умножения, можно записать $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Разделив последнее равенство почленно на P_m, что возможно, так как $P_m \neq 0$, получим

$$C_n^m = A_n^m / P_m = n!/m!(n-m)! \ ■$$

Следствие. *Число сочетаний из n элементов по n−m равно числу сочетаний из n элементов по m, т. е.*

$$C_n^{n-m} = C_n^m. \tag{1.5}$$

□ В выражении для C_n^m поменяем местами сомножители $m!$ и $(n-m)!$; в результате имеем

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^{n-m}. \ ■$$

Задача 1.9. Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

△ Среди выбранных шаров 4 белых и 3 черных. Белые шары можно выбрать $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$ способами. Черные шары можно выбрать $C_5^3 = 5!/3!\ 2! = 10$ способами. Тогда по правилу умножения искомое число способов равно $C_{10}^4 \cdot C_5^3 = 2100$. ▲

При решении последней задачи была использована формула (1.4), так как порядок выбора шаров не играл роли.

Еще раз подчеркнем разницу между размещениями и сочетаниями: в размещениях учитывается порядок входящих в них элементов, а в сочетаниях — не учитывается. При решении задач это не следует забывать. Кроме того, надо иметь в виду, что использование правила умножения приводит к необходимости учитывать порядок элементов при выборе их из какого-либо множества.

Задача 1.10. Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более пяти, а во второй — не более девяти человек?

△ Первая подгруппа может состоять либо из трех, либо из четырех, либо из пяти человек. Подгруппу из трех человек можно выбрать $C_{12}^3 = 220$ способами. Подгруппу из четырех человек можно выбрать $C_{12}^4 = 495$ способами, а подгруппу из пяти человек — $C_{12}^5 = 792$ способами. Учитывая, что выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, найдем по правилу сложения искомое число способов:

$$C_{12}^3 + C_{12}^4 + C_{12}^5 = 1507. \ ▲$$

Задача 1.11. Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е места. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в следующем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд?

△ *Способ 1.* Первые три места могут быть распределены $A_{10}^3 = 10!/7! = 720$ способами. В результате останется семь команд, две из которых выбывают из следующего первенства. Так как в этом случае порядок выбывших команд не важен, то это может произойти $C_7^2 = 7!/2! \cdot 5! = 21$ способами. Согласно правилу умножения получаем, что число разных результатов первенства равно $A_{10}^3 \cdot C_7^2 = 15\,120$.

Способ 2. Выделим без учета порядка пять команд из общего числа команд. В эту группу входят три команды, занявшие призовые места, и две выбывающие команды. Такую операцию можно выполнить C_{10}^5 способами. Из этих пяти команд без учета порядка выделим две команды, которые выбывают, что можно сделать C_5^2 способами. Для оставшихся трех команд распределение призовых мест возможно P_3 способами. По правилу умножения все три операции можно выполнить $C_{10}^5 \cdot C_5^2 \cdot P_3 = 15\,120$ способами.

Способ 3. Распределение всех 10 мест в первенстве возможно $P_{10} = 10!$ способами. Однако перестановки команд, занявших места с 4-го по 8-е, и перестановки команд, занявшие 9-е и 10-е места, на результаты первенства не оказывают влияния. Число таких перестановок равно $5! \cdot 2!$, а число различных результатов первенства равно $10!/5! \cdot 2! = 15\,120$. ▲

Докажем два свойства числа сочетаний, которые могут быть полезными при решении комбинаторных задач.

Теорема. *Имеет место равенство (правило Паскаля)*

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m, \quad 1 \leqslant m < n. \tag{1.6}$$

□ Имеем

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m-1)!} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m}\right] = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m-1)!}\,\frac{n}{(n-m)m} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{(m-1)!\,m\,(n-m-1)!\,(n-m)} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m. \ ■$$

Теорема. *Имеет место равенство*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{1.7}$$

□ Предварительно покажем, что $C_n^0 = C_n^n = 1$ для любого $n \geqslant 1$. Действительно, учитывая, что $0! = 1$ (см. § 1.2), имеем $C_n^0 = n!/0! \cdot n! = 1$, $C_n^n = n!/n! \cdot 0! = 1$. Далее, используя равенство (1.6), получаем

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = C_{n-1}^0 + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) +$$
$$+ (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + \ldots + (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) + C_{n-1}^{n-1} =$$
$$= 2(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}) = 2 \cdot 2(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 +$$
$$+ C_{n-2}^2 + \ldots + C_{n-2}^{n-2}) = \ldots = 2^{n-1}(C_1^0 + C_1^1) = 2^{n-1}(1+1) = 2^n. \ ■$$

Формулу (1.7) проиллюстрируем следующей задачей.

Задача 1.12. Сколько существует вариантов опроса 11 учащихся на одном занятии, если ни один из них не будет подвергнут опросу дважды и на занятии может быть опрошено любое количество учащихся, причем порядок, в котором опрашиваются учащиеся, безразличен?

△ Преподаватель может не спросить ни одного из 11 учащихся, что является одним из вариантов. Этому случаю соответствует C_{11}^0. Преподаватель может опросить только одного из учащихся. Таких вариантов C_{11}^1. Если преподаватель будет опрашивать двух учащихся, то число вариантов опроса равно C_{11}^2. Для опроса трех учащихся существует C_{11}^3 вариантов и т. д. Наконец, могут быть опрошены все учащиеся. Число вариантов в этом случае равно C_{11}^{11}. Тогда по правилу сложения число всех возможных вариантов опроса равно

$$C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + C_{11}^3 + \ldots + C_{11}^{11}.$$

С другой стороны, для каждого из учащихся существует две возможности: он будет опрошен или не опрошен на данном занятии. Другими словами, каждую из 11 операций, заключающихся в том, что каждый ученик будет либо опрошен, либо не опрошен, можно выполнить по правилу умножения $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 = 2^{11}$ способами, что и следовало ожидать, так как

$$C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + \ldots + C_{11}^{11} = 2^{11}. \ ▲$$

ЧАСТЬ II
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА 2
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 2.1. Случайные события

Каждая наука при изучении явлений материального мира оперирует теми или иными понятиями, среди которых обязательно имеются основополагающие. Если для геометрии это понятия точки, прямой, плоскости, а для математического анализа — функции и ее предела, то для теории вероятностей одним из основных является понятие события.

Под *событием* понимается явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление этого комплекса условий будем называть *опытом* или *испытанием*. Здесь предполагается, что комплекс условий, в результате которого наступает определенное событие, может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз, т. е. имеется возможность проводить неоднократно испытание в неизменных условиях. Вообще говоря, полностью совпадения всех условий для каждого испытания добиться невозможно и поэтому можно говорить лишь о некотором приближенном равенстве условий испытаний. При проведении испытания необязательно должен присутствовать и участвовать в нем сам исследователь. Опыт можно поставить мысленно, или «окружающая природа поставит этот опыт сама». В последнем случае исследователь выступает в роли наблюдателя. Например, для появления радуги во время дождя должны иметь место определенные атмосферные условия. И каждый раз, как только возникают соответствующие условия, можно любоваться радугой. На практике часто в силу объективных причин бывает трудно воспроизвести весь комплекс условий, который необходим для появления определенного события. Это обычно связано с недостаточно подробно изученной природой явления или с технической невозможностью его воссоздания в данное время. Поэтому при выполнении неполного комплекса условий интересующее событие может не наступить, и будет иметь место какое-нибудь другое. В силу

изменяющихся независимо от воли исследователя неучтенных условий при повторении испытания будут наступать те или иные события, причем не известно заранее, какие из них. Такие события обычно называются *случайными*. Например, один выстрел из винтовки по мишени — испытание, причем его можно повторить сколько угодно раз. В результате такого испытания наступит одно из 11 следующих случайных событий: «в результате одного выстрела выбито 0 очков»; «в результате выстрела выбито 1 очко»; «в результате выстрела выбито 2 очка»; ...; «в результате выстрела выбито 10 очков». Здесь трудно сказать заранее, какое из названных случайных событий в результате выстрела произойдет наверняка.

Определение. *Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).*

В дальнейшем для простоты слово «случайный» будем опускать. События обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ... и т. д.

○ **Пример 2.1.** Бросается симметричная монета. Бросание монеты — испытание. «Монета упала «гербом» вверх» и «монета упала решкой вверх» — возможные события. ●

○ **Пример 2.2.** Завтра днем — ясная погода. Здесь наступление дня является испытанием. «В течение дня наблюдается ясная погода» — событие. ●

Из приведенных примеров следует, что событие можно охарактеризовать, сформулировав его в виде предложения. Однако не всякое предложение выражает событие. Например, предложение «Миру нужен мир» не задает какого-либо события, которое могло бы произойти или не произойти.

На практике часто встречаются события, которые обязательно всякий раз происходят в результате определенного испытания. Также встречаются события, которые не могут произойти в результате испытания, сколько бы раз его ни проводили.

Определение. *Событие называется достоверным, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.*

○ **Пример 2.3.** Наступление ночи по прошествии дня — достоверное событие. ●

○ **Пример 2.4.** СССР — самое большое по площади государство на нашей планете. Это событие является достоверным. ●

Определение. *Событие называется невозможным, если оно не может произойти в результате данного испытания.*

○ **Пример 2.5.** Выпадение цифры 5 при бросании десятикопеечной монеты — невозможное событие. ●

○ **Пример 2.6.** Появление марсианина на улицах современного города — невозможное событие. ●

Ранее уже отмечалось, что в результате опыта (испытания) возможно появление того или иного события.

Некоторые из возможных в данном испытании событий могут наступить вместе, т. е. быть совместными. В результате испытания может возникнуть и другая ситуация, когда появление одного из возможных в данном случае событий обязательно исключает появление определенного другого события, т. е. события могут быть и несовместными. Пусть бросается игральный кубик, на гранях которого различное число очков от 1 до 6. В результате этого испытания могут наступить такие события, как «на верхней грани четное число очков»; «число очков на верхней грани равно 3»; «на верхней грани 6 очков». Появление на верхней грани кубика трех очков исключает появление шести очков. Поэтому последние два события являются несовместными при одном испытании. Такие события, как выпадение четного числа очков и выпадение числа очков, равного 6, уже являются совместными, поскольку число 6 является четным.

Определение. *События A и B называются несовместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.*

○ **Пример 2.7.** Бросается монета. Появление решки исключает появление «герба», и наоборот. Поэтому события «появилась решка» и «появился «герб» — несовместные события. ●

Определение. *События A и B называются совместными, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появления другого.*

○ **Пример 2.8.** В аудиторию вошел человек. События «в аудиторию вошел человек старше 30 лет» и «в аудиторию вошел мужчина» — совместные, поскольку в аудиторию может войти мужчина старше 30 лет. ●

Пусть некто набирает номер телефона при исправной телефонной сети. В результате этого испытания возможны следующие события: «номер занят», «номер свободен». Эти два события взаимосвязаны, так как непоявление одного из них влечет за собой обязательно появление другого.

Выше понятие «влечет», употреблялось применительно к событиям. В дальнейшем будем говорить, что событие A влечет событие B, если всякий раз, когда наступает событие A, наступает и событие B.

Определение. *Два события A и $\bar{A}$* называются противоположными или взаимно дополнительными, если непоявление одного из них в результате данного испытания влечет появление другого ($\bar{A}$ читается «не A»).

Следует заметить, что события A и $\bar{A}$ несовместны.

○ **Пример 2.9.** Если при проверке, оказалось, что некоторое изделие имеет дефекты, то это изделие не может быть стандартным, и наоборот. Поэтому события «изделие бракованное» и «изделие стандартное» — противоположные. ●

○ **Пример 2.10.** Событию «все спортсмены команды завоевали призовые места» противоположным является «хотя бы один из спортсменов команды не занял призовое место». ●

Рассмотрим теперь на примере множество события, которые могут произойти в результате некоторого испытания.

Пусть производится один выстрел по мишени. Выделим следующие события, которые могут произойти в результате этого испытания (опыта):

A_i — «выбито i очков, где i изменяется от 0 до 10»,
B — «выбито четное число очков»,
C — «выбито нечетное число очков»,
D — «выбито более 4 очков»,
E — «выбито менее 5 очков»,
F — «число выбитых очков делится на 11»,
Q — «число выбитых очков меньше 12».

Ограничимся этими событиями, хотя их список можно было продолжить. Нетрудно заметить, что между отдельными событиями наблюдается определенная связь. Например, события A_i попарно несовместны; то же самое можно сказать и про пары событий B и C, A_6 и E, A_3 и B. Пары событий B и C, D и E являются противоположными событиями, а пары событий A_8 и B, A_3 и C, A_2 и E, A_5 и Q — совместными. Если произошло событие A_8, т. е. выбито 8 очков, то обязательно произойдет событие B, так как число 8 четное. Заметим, что эти события совместны. Предположим, что выбито 2 очка, т. е. произошло событие B, однако событие D не наступило, хотя события B и D совместны. Особое место занимают события F и Q. Первое из них является невозможным событием, а второе — достоверным.

Обратим внимание на следующие группы события, которые обладают одинаковыми свойствами:

1) A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10};
2) B, C;
3) D, E.

В результате опыта обязательно произойдет одно и только одно событие, неважно какое, из всех событий, принадлежащих одной из рассматриваемых групп, причем любые два события, принадлежащие одной группе, несовместны. Теперь на основании рассмотренного примера сформулируем два определения.

Определение. *Событие A называется благоприятствующим событию B, если появление события A влечет за собой появление события B.*

В рассмотренном выше примере события A_1, A_2, A_3, A_4 являются благоприятствующими событию E, а события A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 — благоприятствующими событию C.

Определение. *Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется полной группой событий.*

Приведенные выше три группы событий, по определению, являются полными. При решении вероятностных задач большую роль играет выбор полной группы событий. Если полная группа выбрана удачно, то решение задачи значительно упрощается. В противном случае оно будет представлять определенные трудности или даже не будет найдено. С некоторым преувеличением можно сказать, что «выбор полной группы есть искусство». В дальнейшем каждое событие из полной группы попарно несовместных событий будем называть *исходом* данного опыта (испытания). Иногда исходы испытания называются *элементарными событиями*. Рассмотрим пример полной группы попарно несовместных событий.

○ **Пример 2.11.** Бросается игральный кубик. События, заключающиеся в том, что на верхней грани кубика появится 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков, образуют полную группу событий, так как в результате опыта кубик обязательно упадет какой-нибудь гранью вверх, а значит, произойдет одно из указанных событий. Все эти события попарно несовместны, так как кубик не может упасть одновременно двумя гранями вверх. Группа событий, состоящая в том, что выпадет 1, 2, 4, 5, 6 очков, не является полной, поскольку в результате опыта может выпасть 3 очка, а такое событие не содержится в указанной группе. ●

На основании определений полной группы и достоверного события можно сделать вывод, что событие, заключающееся в появлении одного, неважно какого, из событий полной группы,— достоверное.

Понятие полной группы позволяет доказать утверждение, что два несовместных события, образующие полную группу, являются противоположными событиями. Действительно, если в результате опыта не произойдет одно из событий, то обязательно произойдет другое, так как, по определению полной группы, одно из них должно обязательно произойти. Такие события, по определению, называются *противоположными*.

Предположим, что имеется идеально симметричный кубик, изготовленный из однородного материала. В этом случае нет оснований считать выпадение 6 очков более возможным, чем выпадение, например, 2 очков. Поэтому правомочно считать, что возможность выпадения 6 очков та же, что и выпадения любого другого числа очков, т. е. все 6 событий, которые могут наступить в результате бросания игрального кубика, равновозможны.

Определение. *События называются равновозможными, если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.*

○ **Пример 2.12.** В урне находятся тщательно перемешанные 10 одинаковых на ощупь шаров. Среди них 5 белых и 5 черных. Наудачу вынимается один шар. Здесь события «появился белый шар» и «появился черный шар» равновозможны. ●

○ **Пример 2.13.** «Появление «герба» и «появление решки» при бросании симметричной монеты — равновозможные события. ●

В рассмотренных примерах вывод о равновозможности событий делался из соображений симметрии. Условия опытов

были симметричны относительно рассматриваемых событий, т. е. все события были «поставлены в равные условия». Высказывая утверждение о равновозможности событий, приходится делать определенные допущения. Например, при бросании монеты предполагается, что она сделана из однородного материала, представляет собой круговой цилиндр, симметрична (т. е. не погнута), что наличие чеканки не влияет на положение центра тяжести. Эти допущения, основанные на здравом смысле, позволяют обосновать вывод о равновозможности событий, однако это не всегда можно сделать исходя из условий испытания.

§ 2.2. Операции над событиями

В некоторых разделах математики вводятся операции над изучаемыми объектами. Так как свойства этих операций аналогичны свойствам арифметических действий, то и свое название они получили по аналогии с арифметическими действиями. К таким операциям относятся операции сложения и умножения чисел, векторов, матриц. Подобные операции над событиями вводятся и в теории вероятностей; они позволяют упростить форму записи, а иногда и логическое построение рассуждений.

Определение. *Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.*

Сумму событий будем обозначать знаком «+».

Если имеются два совместных события A и B, то сумма $A+B$ означает, что наступило событие A, или событие B, или оба события вместе. Если же события несовместны, то событие $A+B$ заключается в том, что наступило событие A или событие B, так как совместное наступление событий A и B невозможно. В этом случае знак «+» заменяет союз «или». Про событие $A+B+C$ можно сказать, что оно состоит в наступлении одного из событий A, B, C, или в совместном наступлении пары событий A и B, A и C, B и C, или в совместном наступлении всех трех событий.

○ **Пример 2.14.** В урне находятся красные, белые и черные шары. Вынимается один шар. Возможны следующие события: A — «вынут красный шар»; B — «вынут белый шар»; C — «вынут черный шар». Событие $A+B$ означает, что произошло событие «вынут не черный шар», а событие $B+C$ — «вынут не красный шар». ●

○ **Пример 2.15.** Турист хочет и имеет возможность посетить три города. Обозначим события: A — «турист посетил город A». B — «турист посетил город B»; C — «турист посетил город C». Событие $A+C$ заключается в том, что турист посетил только один из городов A и C или он посетил их оба. ●

○ **Пример 2.16.** Монета бросается четыре раза. Рассмотрим следующие события: A_i — «герб» появился i раз», $i=0$, 1, 2, 3, 4. Событие $B=A_0+A_1+A_2$ означает, что «герб» выпал не более двух раз, т. е. произошло событие

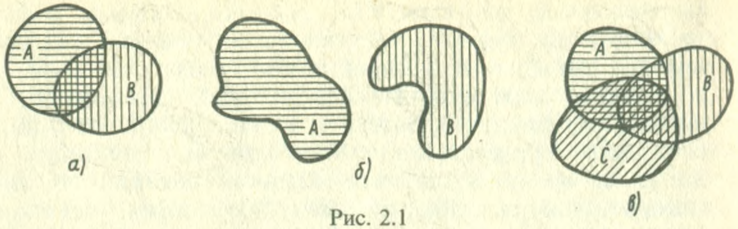

Рис. 2.1

«или «герб» не появился, или «герб» появился один раз, или «герб» появился два раза». Событие $A_1+A_2+A_3+A_4$ означает, что «герб» появился хотя бы один раз. Все указанные события попарно несовместны, поэтому знак «+» в данном случае означает союз «или». Заметим, что рассмотренное испытание можно заменить одним бросанием четырех монет сразу. ●

Операция сложения событий, как и другие операции, имеет полезную геометрическую интерпретацию. Пусть на плоскости имеется некоторая фигура A и на плоскость произвольным образом бросается точка. Если точка попала в фигуру A, то будем считать, что произошло событие A.

На рис. 2.1, *а* изображены фигуры A и B, которым соответствуют события A и B. Если точка попадет в область с двойной штриховкой, то события A и B произойдут одновременно. Этот рисунок иллюстрирует совместные события. Сумме событий соответствует вся заштрихованная область. Она обведена жирной линией. На рис. 2.1, *б* изображены две области, которым соответствуют два несовместных события, так как точка не может одновременно попасть и в область A, и в область B, поэтому события A и B не могут произойти вместе. Сумме $A+B$ соответствуют две непересекающиеся области, обведенные жирной линией, на рис. 2.1, *в* жирной линией отмечена область, соответствующая сумме $A+B+C$. Если в этом случае точка попадет в область с тройной штриховкой, то наступят совместно все три события. При попадании точки в область с двойной штриховкой произойдут совместно события A и B, или A и C, или B и C. Приведенные рисунки обычно называют *диаграммами Венна*.

Определение. *Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.*

Произведение событий будем обозначать знаком «·». В данном случае знак «·» заменяет союз «и». Например, если произошло ABC, то это означает, что наступило событие «A и B и C». В дальнейшем знак · будем опускать.

○ **Пример 2.17.** Пусть имеются следующие события: A — «из колоды карт вынута «дама»; B — «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Очевидно, AB есть событие «вынута дама пик». ●

○ **Пример 2.18.** Бросается игральный кубик. Рассмотрим следующие события: A — «число выпавших очков меньше 5»; B — «число выпавших очков

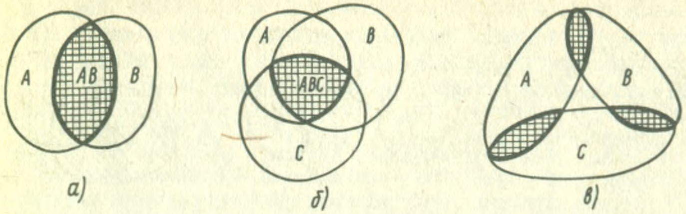

Рис. 2.2

больше 2»; C — «число выпавших очков четное». Тогда событие ABC заключается в том, что выпало 3 очка. ●

Рассмотрим теперь диаграммы Венна, соответствующие произведению событий. На рис. 2.2, *а* изображена диаграмма Венна, иллюстрирующая произведение двух событий, а на рис. 2.2, *б* — диаграмма, иллюстрирующая произведение трех событий. Любая точка, попавшая в заштрихованную и обведенную жирной линией область, обязательно попадет в области A и B в первом случае и в области A, B и C во втором случае. Это означает, что наступят события AB и ABC, так как в первом случае одновременно наступят события A и B, а во втором — события A, B и C.

Пусть имеются три события A, B, C, каждые два из которых совместны, но произведение этих событий является невозможным событием. Диаграмма Венна, иллюстрирующая этот случай, изображена на рис. 2.2, *в*. Как видно из рисунка, не найдется ни одной точки плоскости, которая принадлежала бы всем трем областям A, B, C одновременно. Следовательно, события A, B, C не могут наступить все вместе, т. е. они не являются совместными в совокупности, хотя они попарно совместны.

○ **Пример 2.19.** Бросается игральный кубик. Исходами этого опыта являются события A_i, $i=1, 2,..., 6$, состоящие в том, что число выпавших очков равно i. Выделим следующие возможные события: B — «число выпавших очков меньше 4»; C — «число выпавших очков больше 2»; D — «число выпавших очков четно». События B благоприятствуют исходы A_1, A_2, A_3, событию C — исходы A_3, A_4, A_5, A_6, а событию D — исходы A_2, A_4, A_6. Произведением событий B и C является событие A_3, т. е. $BC=A_3$. События A_3 и D несовместны, так как число 3 не является четным. Поэтому событие $A_3D=BCD$ является невозможным. Этому событию не благоприятствует ни один из 6 исходов, несмотря на то что событию BC благоприятствует событие A_3, событию BD — событие A_2, событию CD — события A_4, A_6. ●

Определение. *События называются совместными в совокупности, если каждое из них и произведение остальных являются совместными событиями.*

Из определения произведения следует, что события, участвующие в произведении, должны быть совместными в совокупности. В противном случае произведение событий является событием невозможным. В дальнейшем для простоты слова «в совокупности» будем опускать.

Используя операции сложения и умножения, можно сложное событие разложить на более простые события, и наоборот.

○ **Пример 2.20.** Пусть в цехе некоторого завода имеется три станка. Рассмотрим следующие события: A_1 — «в течение дня произойдет поломка 1-го станка»; A_2 — «в течение дня произойдет поломка 2-го станка»; A_3 — «в течение дня произойдет поломка 3-го станка». Испытание будет заключаться в том, что станки работают с начала до конца рабочего дня и фиксируется поломка каждого из них. По определению противоположного события, события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ означают бесперебойную работу соответствующих станков в течение дня. Событие $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ заключается в том, что только 1-й станок потребует ремонта за время испытания. Событие $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$ означает поломку только 2-го станка, а событие $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ — поломку только 3-го станка. Тогда сложное событие $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ означает событие «в течение дня произошла поломка только одного станка». Событие, состоящее в том, что во время испытания произойдет поломка не менее одного станка (хотя бы одного), можно представить в виде $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1A_2A_3$. Противоположное ему событие $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ заключается в том, что ни один станок не потребует ремонта. Эти два события связаны равенством $\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1A_2A_3$. ●

Рассмотрим примеры противоположных событий.

○ **Пример 2.21.** Необходимо выбрать делегата на конференцию на общем собрании четырех групп учащихся. Рассмотрим события A_i — «делегат выбран из i-й группы», $i=1, 2, 3, 4$. В этом случае событие $\bar{A}_1$ можно представить в виде $A_2+A_3+A_4$, т. е. событие «делегат выбран из 2-й, или 3-й, или 4-й группы» является противоположным событию «делегат выбран из 1-й группы». ●

○ **Пример 2.22.** Произведено три выстрела по мишени. Обозначим A_i — «в мишени i пробоин», $i=0, 1, 2, 3$, а B — «в мишени хотя бы одна пробоина». Очевидно, $B=A_1+A_2+A_3$. Событие A_0 — «в мишени ни одной пробоины» противоположно событию B. Символически это можно записать так: $\bar{B}=A_0$, или $A_1+A_2+A_3=\bar{A}_0$, или $\overline{A_1+A_2+A_3}=A_0$. ●

Рассмотренные приемы представления сложных событий, и особенно представление сложного события через ему противоположное, часто используют в теории вероятностей.

§ 2.3. Классическая формула вероятности

В повседневной жизни в разговоре часто используется слово «вероятный». Например, «к вечеру, вероятно, пойдет дождь», «это невероятный случай», «вероятнее всего он опоздает». При употреблении этого слова интуитивно оценивается возможность наступления того или иного события. Можно сказать, что одно событие наступит чаще, чем другое. В этом случае говорят, что оно более возможно, т. е. его наступление более вероятно. Естественно, при такой оценке человеку помогает здравый смысл и жизненный опыт.

Например, предполагая, что первым увиденным человеком в кинотеатре на детском киносеансе скорее всего будет школьник, а не взрослый, мы считаем, что на детском киносеансе заведомо больше детей, чем взрослых. Из опыта

известно, что при выполнении многих видов работ вредна торопливость. В спешке можно совершить такое действие, которое сведет на нет всю предыдущую работу. Иначе говоря, при спешке более вероятен брак в работе, т. е. вероятность (возможность) выхода брака выше.

Пусть, например, в ящике находятся 28 одинаковых по внешнему виду изделий, среди которых два изделия 3-го сорта и по тринадцать изделий 1-го и 2-го сорта. Наудачу вынимается одно изделие. В данном случае разумно считать событие «вынуто изделие 1-го сорта» более возможным, чем событие «вынуто изделие 3-го сорта», так как изделий 1-го сорта значительно больше, чем изделий 3-го сорта.

Очевидно, события «вынуто изделие 1-го сорта» и «вынуто изделие 2-го сорта» имеют одинаковую возможность появления, поскольку количество этих изделий одинаково.

Однако в жизни чаще встречаются события, сравнить или оценить возможности появления которых, основываясь на чисто интуитивных соображениях, трудно. Например, это можно сказать про события «герб» появился два раза при пятикратном бросании монеты», «во время решения задачи отказала ЭВМ» и т. д. Как видно из приведенных примеров, каждое событие обладает определенной степенью возможности наступления, т. е. определенной оценкой. Такую оценку события называют вероятностью события.

Определение. *Вероятность события — это численная мера объективной возможности его появления.*

По определению, событию можно поставить в соответствие определенное число — его вероятность. Однако приведенное определение не дает формулу для нахождения этого числа. Во многих случаях проблема решается, если применить классическую формулу вероятности, которая дается ниже.

Пусть проводится опыт, в результате которого могут наступить те или иные события. Если эти события образуют полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, то говорят, что опыт «сводится к схеме случаев». Здесь *случаем* называют каждое из событий (исходов), принадлежащих выделенной полной группе. Для опытов, которые сводятся к схеме случаев, применима классическая формула вероятности.

Пусть имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий. Вероятность $P(A)$ наступления события A вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

Если N — число всех исходов испытания, а M — число исходов, благоприятствующих событию A, то

$$P(A)=\frac{M}{N}. \tag{2.1}$$

Проиллюстрируем формулу решением следующих задач.

Задача 2.1. Какова вероятность появления четного числа очков при одном бросании игрального кубика?

△ Обозначим через A событие «выпало четное число». Рассмотрим события A_i — «выпало i очков», $i = 1, 2, ..., 6$. Очевидно, что эти события равновозможны и образуют полную группу (см. пример 2.11). Тогда число всех исходов $N = 6$. Выпадению четного числа очков благоприятствуют события A_2, A_4, A_6, т. е. $M = 3$. Искомая вероятность, по определению, равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов: $P(A) = M/N = 3/6 = 1/2$. ▲

Задача 2.2. *Ошибка Д'Аламбера.* Бросаются две монеты. Какова вероятность, что обе монеты упадут «гербом» кверху?

△ При решении этой задачи возможно рассуждать примерно так: в результате бросания двух монет возможны следующие три события: «выпали два «герба»; «выпали две решки»; «выпали «герб» и решка». Эти события находятся в равных условиях, поэтому их вероятности равны 1/3.

Решим эту задачу иначе. Возможные события, которые являются результатом опыта с двумя монетами, будем обозначать двумя буквами. Первая буква означает выпадание «герба» (Г) или решки (Р) на 1-й монете, а вторая — выпадание «герба» или решки на 2-й. Тогда 4 исхода бросания двух монет можно записать так: ГГ; ГР; РГ; РР. Все эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Пусть событие A — «выпали два «герба». Этому событию благоприятствует только один исход ГГ. Поэтому $M = 1$, $N = 4$, $P(A) = M/N = 1/4$. Теперь нетрудно заметить ошибку Д'Аламбера. Он считал, что события «выпали два «герба», «выпали «герб» и решка» равновозможны, а это не так. Последнему событию благоприятствуют два исхода: ГР и РГ, поэтому вероятность события «выпали «герб» и решка» $P = M/N = 2/4 = 1/2 \neq 1/3$. ▲

Задача 2.3. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7?

△ Каждый из кубиков может упасть шестью различными способами. Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть $6 \cdot 6 = 36$ различными способами. Каждому такому способу соответствует событие, которое является исходом испытания бросания двух кубиков. В силу симметричности кубиков все эти события равновозможны и образуют полную группу несовместных событий. Поэтому число всех исходов бросания двух кубиков $N = 36$. Для подсчета числа исходов, благоприятствующих событию A, состоящему в выпадении суммы очков, равной 7, составим следующую таблицу:

Число выпавших очков на 1-м кубике	1	2	3	4	5	6
Число выпавших очков на 2-м кубике	6	5	4	3	2	1
Сумма очков	7	7	7	7	7	7

Как видно из таблицы, число благоприятствующих исходов $M = 6$. Тогда, по определению, $P(A) = M/N = 6/36 = 1/6$. ▲

Задача 2.4. В группе 30 учащихся. Из них 12 юношей, остальные — девушки. Известно, что к доске должны быть вызваны двое учащихся. Какова вероятность, что это девушки?

△ Обозначим событие, вероятность которого следует найти, буквой A. Очевидно, что по условию задачи порядок вызова к доске учащихся не играет роли. Найдем число всех исходов испытания, состоящего в вызове двух учащихся. Это число равно количеству способов, которыми можно выбрать двух учащихся из 30. Порядок выбора не играет роли, поэтому $N = C_{30}^2$. Найдем теперь число M благоприятствующих исходов. Для этого следует определить число способов выбора двух девушек из 18. Оно равно C_{18}^2. По определению вероятности,

$$P(A) = M/N = C_{18}^2 / C_{30}^2 = 51/145. \ ▲$$

Задача 2.5. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 13?

△ Число N всех исходов испытания равно 36 (см. задачу 2.3) и любой из этих исходов благоприятствует наступлению события A, заключающегося в том, что сумма выпавших очков меньше 13. Действительно, максимальная сумма очков выпадет тогда, когда на каждом кубике выпадет по 6 очков. Но эта сумма равна 12, и она меньше 13. Следовательно, $M = 36$. Тогда

$$P(A) = M/N = 36/36 = 1. \ ▲$$

Задача 2.6. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом вынимаются подряд три карточки и кладутся в ряд. Какова вероятность того, что число, составленное из трех цифр, которые написаны на карточках, больше 987?

△ Найдем число исходов, благоприятствующих событию A, вероятность которого следует определить. Однако это число равно нулю, так как из данных карточек нельзя составить число, большее 987. Действительно, любое число, большее 987, например 988, 991, предполагает повторение цифр, что невозможно по условию задачи. Таким образом, число благоприятствующих исходов $M = 0$. Тогда

$$P(A) = M/N = 0/N = 0. \ ▲$$

Заметим, что, сколько бы раз ни проводился опыт, событие A в задаче 2.6 никогда не наступит, поэтому оно является невозможным, а в задаче 2.5 событие A наступит всегда; следовательно, оно является достоверным.

Обобщим результаты, полученные при решении задач, в виде свойств вероятности и докажем их.

1^0. *Вероятность достоверного события равна* 1.

□ Если событие A достоверное, то любой исход испытания благоприятствует этому событию, но тогда $M=N$. Следовательно,

$$P(A)=M/N=N/N=1. \blacksquare$$

2^0. *Вероятность невозможного события равна* 0.

□ Если событие A невозможное, то ни один из исходов испытания не благоприятствует ему. Следовательно, $M=0$, но тогда

$$P(A)=M/N=0/N=0. \blacksquare$$

3^0. *Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

□ Число исходов, благоприятствующих наступлению события, либо равно 0, либо N, либо, по определению вероятности, является частью всех N исходов испытания. Тогда $0 \leqslant M \leqslant N$, а значит, $0 \leqslant M/N \leqslant 1$. Следовательно, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. ■

В настоящее время свойства вероятности определяются в виде аксиом, сформулированных А. Н. Колмогоровым.

Одним из основных достоинств классического определения вероятности является возможность вычислить вероятность события непосредственно, т. е. не прибегая к опытам, которые заменяют логическими рассуждениями.

§ 2.4. Статистическая вероятность. Геометрические вероятности

В предыдущем параграфе для непосредственного нахождения вероятности события использовалась формула $P(A)=M/N$, которая предполагает выполнение определенных условий. Например, было нужно, чтобы опыт сводился к схеме случаев. Последнее означает, что среди всех возможных событий, появляющихся в результате данного опыта, можно выделить полную группу попарно несовместных и равновозможных событий. Однако на практике такую группу зачастую бывает выделить трудно. Известно много опытов, результаты которых оказались непредсказуемыми, хотя, казалось бы, были предусмотрены все его исходы. Например, любой полет в космос можно считать опытом (испытанием). Однако вряд ли кто возьмет на себя смелость представить результат этого опыта в виде полной совокупности исходов. Невозможность представить во многих случаях результат опыта в виде полной группы событий является одним из недостатков классической формулы вероятности.

Не менее серьезным недостатком является трудность обоснования равновозможности событий. Определяя некоторые события как равновозможные, обычно руководствуются соображениями симметрии. Но симметричность условий опыта на практике наблюдается только в искусственно организованных опытах. Так, например, при бросании игрального кубика или монеты считается, что эти объекты симметричны, изготовлены из однородного материала и т. д. Однако не всякая ситуация позволяет сделать подобные предположения и, следовательно, воспользоваться классической формулой нахождения вероятности.

Так как вероятность события существует объективно, независимо от того, можно или нельзя применить в данном конкретном случае классическую формулу, то возникает вопрос, что считать вероятностью события и как ее вычислить. На практике давно было замечено, что при многократном повторении опытов относительная частота появления события в этих опытах стремится к устойчивости. Другими словами, при малом количестве опытов относительная частота появления события подвержена резким колебаниям, а при увеличении их числа эти колебания уменьшаются, относительная частота выравнивается, приближаясь к некоторому постоянному числу. Под *относительной частотой* появления события понимается отношение m/n, где n — число опытов, m — число появлений события. Я. Бернулли доказал (см. § 7.4), что при неограниченном увеличении числа опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. При этом должны выполняться некоторые условия, обеспечение которых обычно не представляет трудности. Поэтому естественно относительную частоту появления события при достаточно большом числе испытаний называть *статистической вероятностью* в отличие от ранее введенной «математической» вероятности. Многие исследователи проверяли закон Я. Бернулли. Проводились многократные опыты, сводящиеся к схеме случаев, так как в этом случае можно вычислить вероятность, используя ее классическое определение. Так, например, Дж. Керрих провел опыты с бросанием монеты. Им было осуществлено 10 серий, каждая из которых содержала по 1000 бросков монеты. Оказалось, что «герб» выпал 502, 497, 511, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529 раз. Как видно, ни в одной из серий относительная частота выпадания «герба» не равна 0,5, т. е. не совпадает с вероятностью выпадания «герба» при одном бросании монеты. Результаты этого и ряда других опытов приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

	Число испытаний	Частота проявления «герба»	Относительная частота (статистическая вероятность)
Опыт Керриха	10 000	5 087	0,5087
Опыт Бюффона	4 040	2 048	0,5069
Первый опыт Пирсона	12 000	6 019	0,5016
Второй опыт Пирсона	24 000	12 012	0,5005

Нетрудно заметить при изучении данных таблицы стремление относительной частоты с возрастанием числа опытов к вероятности $P(\Gamma)=0{,}5$. Так, на практике можно установить, что относительная частота события (статистическая вероятность) стремится к вероятности события в отдельном испытании. Поэтому относительную частоту при достаточно большом числе опытов можно считать приближенным значением вероятности.

Классическая формула вероятности предполагает конечное число всех исходов испытания. Но часто встречаются такие испытания, для которых число возможных исходов бесконечно. В подобных случаях классическая формула вероятности также неприменима, и в этом заключается еще один ее недостаток. Например, при изготовлении на станке некоторой детали нужно выдержать определенный размер. Здесь точность изготовления детали зависит от мастерства рабочего, точности измерительного инструмента и т. д. Таким образом, можно получить деталь любого размера, как угодно близкого к требуемому. Если под опытом понимать изготовление детали, то в результате такого опыта возможно бесконечное множество исходов.

Для преодоления указанного недостатка классической формулы вероятности часто используют некоторые понятия геометрии, если позволяют обстоятельства опыта. Во всех этих случаях предполагается возможность проведения, пусть даже теоретически, любого числа испытаний, а понятию равновозможности отводится главная роль.

Пусть на плоскости имеется некоторая фигура F, которая содержит фигуру f. На фигуру F наугад бросается точка, которая может оказаться в любой точке фигуры F. Другими словами, в результате бросания точки (опыта) возможно бесчисленное множество исходов. В данном случае нет оснований считать неравновозможными хотя бы два каких-либо исхода из всего множества исходов. Понятно, что брошенная точка может оказаться в фигуре f, а может там и не оказаться, поэтому возможно говорить о вероятности попадания точки в фигуру f. В данном случае будет естественным

связать вероятность с площадями фигур f и F: чем больше площадь фигуры f, тем больше точка имеет возможностей попасть в нее. Обозначим через A событие, состоящее в попадании брошенной точки в фигуру f, а через S_f и S_F — площади фигур f и F соответственно. Тогда под вероятностью события A будем понимать отношение данных площадей, т. е. $P(A)=S_f/S_F$. По аналогии с понятием благоприятствующего исхода, фигуру f будем называть благоприятствующей появлению события A.

В приведенном выше примере рассматривались двумерные области, мерами которых были соответствующие площади. Но область может быть одномерной (кривая, прямая, отрезок), тогда ее мерой является длина. Область также может быть и трехмерной (некоторое тело в пространстве), мерой ее является объем. Исходя из этого, дадим определение геометрической вероятности.

Определение. *Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области.*

Применение геометрической вероятности проиллюстрируем решением следующих задач.

Задача 2.7. Перед окопами вдоль прямой линии через каждые 10 м установлены противотанковые мины. Перпендикулярно этой линии движется танк, ширина которого 3 м. Какова вероятность того, что танк пересечет линию установки мин невредимым, т. е. что мина не взорвется?

△ Ось симметрии танка может пересечь линию установки мин в любой ее точке, т. е. исходы испытания (пересечения линии) образуют бесконечное множество, поэтому здесь классическое определение вероятности неприменимо. Пусть отрезок прямой, расположенный между двумя соседними минами, изображен на рис. 2.3. Танк при своем движении может попасть на один из таких отрезков. Расстояние $|AB|=10$ м, $|AC|=|DB|=1{,}5$ м. Если ось симметрии танка попадет на отрезок AC или DB, то произойдет взрыв, а если ось симметрии попадет на отрезок CD, то его не будет. Таким образом, областью, благоприятствующей наступлению события A, заключающегося в беспрепятственном пересечении линии установки мин, является отрезок CD, а множеству всех исходов соответствует отрезок AB. Тогда

$$P(A)=|CD|/|AB|=7/10. \blacktriangle$$

Задача 2.8. На плоскости нанесена сетка квадратов со стороной 8 см. Найти вероятность, что брошенный на плоскость круг радиуса 1 см не пересечет ни одной стороны квадрата.

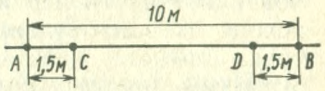

Рис. 2.3

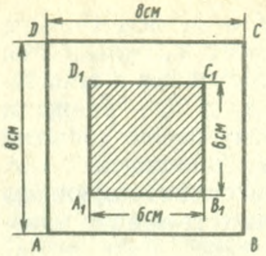

Рис. 2.4

△ При бросании круга его центр может попасть в любой из квадратов, начерченных на плоскости. Один из таких квадратов изображен на рис. 2.4. Сторона заштрихованного квадрата равна 6 см, а ширина «рамки» — 1 см. Если центр круга попадет в «рамку», то сам круг обязательно пересечет сторону квадрата со стороной 8 см. Если же центр круга попадет в заштрихованный квадрат со стороной 6 см, то он не пересечет границу квадрата со стороной 8 см. Поэтому заштрихованный квадрат является благоприятствующей областью наступления события A, вероятность которого следует найти. Таким образом,

$$P(A)=\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}=6^2/8^2=9/16. \ \blacktriangle$$

ГЛАВА 3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 3.1. Теорема сложения вероятностей

Теория вероятностей позволяет определять вероятность события по известным вероятностям других событий, если последние связаны с первым. В этом случае используют теоремы сложения и умножения вероятностей. Эти теоремы дают возможность найти вероятность появления одного из нескольких случайных событий или вероятность совместного поступления двух событий и более. Прежде чем рассматривать теорему сложения вероятностей, решим следующую задачу.

Задача 3.1. В ящике 12 белых, 7 черных и 11 синих одинаковых на ощупь шаров. Наудачу вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар не белый?

△ Количество всех шаров в ящике равно 30, т. е. число N всех исходов испытания, заключающегося в вынимании одного шара, равно 30. Если вынутый шар не белый, то это означает, что он либо черный, либо синий. Вынуть либо черный, либо синий шар по правилу сложения можно $7+11=18$ способами. Следовательно, число M исходов, благоприятствующих событию C, которое состоит в вынимании не белого шара, равно 18. Тогда

$$P(C)=M/N=18/30=3/5. \ \blacktriangle$$

Пусть теперь событие A — «появился черный шар», а событие B — «появился синий шар». Найдем вероятности этих событий. Имеем $P(A)=7/30$, $P(B)=11/30$. Сложив полученные вероятности, получим $P(A)+P(B)=7/30+11/30=18/30=3/5=P(C)$. Заметим, что событие C является суммой событий A и B, т. е. $C=A+B$. Полученный результат обобщим в виде следующей теоремы.

Теорема. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, неважно какого, равна сумме вероятностей этих событий, т. е.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{3.1}$$

□ Введем следующие обозначения: N — общее число возможных исходов испытания; M — число исходов, благоприятствующих событию A; L — число исходов, благоприятствующих событию B. Тогда $P(A)=M/N$, $P(B)=L/N$. Так как события A и B несовместны, то нет таких исходов, которые были бы благоприятствующими и событию A, и событию B одновременно. Поэтому событию $A+B$ благоприятствуют $M+L$ исходов и

$$P(A+B)=(M+L)/N=M/N+L/N=P(A)+P(B). \ \blacksquare$$

Используя метод математической индукции, можно доказанную теорему обобщить на любое конечное число попарно несовместных событий.

Теорема. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.*

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n),$$

или

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{3.2}$$

Задача 3.2. От коллектива бригады, которая состоит из 6 мужчин и 4 женщин, на профсоюзную конференцию выбирается два человека. Какова вероятность, что среди выбранных хотя бы одна женщина?

△ Обозначим через A событие, состоящее в том, что среди выбранных двух делегатов хотя бы одна женщина. Если произойдет событие A, то обязательно произойдет одно из следующих несовместных событий: B — «выбраны мужчина и женщина»; C — «выбраны две женщины». Поэтому можно записать: $A=B+C$. Найдем вероятности событий B и C. Два человека из 10 можно выбрать C_{10}^2 способами. Это и есть число всех исходов испытания (выбора двух человек). Двух женщин из 4 можно выбрать C_4^2 способами. Мужчину и женщину по правилу умножения можно выбрать $6\cdot4$

способами. Тогда $P(B)=6\cdot 4/C_{10}^2$, $P(C)=C_4^2/C_{10}^2$. Так как события B и C несовместны, то, по теореме сложения,

$$P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)=8/15+2/15=2/3. \blacktriangle$$

При решении рассмотренной задачи не рассматривалось событие D — «выбраны двое мужчин», вероятность которого $P(D)$ равна $C_6^2/C_{10}^2=1/3$. Теперь можно заметить, что события B, C, D образуют полную группу, события D и A — противоположные, а $P(B)+P(C)+P(D)=1$.

Обобщим и докажем полученные результаты в виде следствий теоремы сложения. Эти действия помогают упростить решение многих вероятностных задач.

Следствие 1. *Сумма вероятностей попарно несовместных событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n, образующих полную группу, равна 1.*

□ Рассмотрим событие $E=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$. Оно заключается в том, что в результате опыта произойдет одно из событий $A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$, неважно какое. Так как указанные события образуют полную группу, то в результате опыта всегда наступит событие E, т. е. оно является достоверным (см. § 2.1). Тогда $P(E)=1$ (свойство 1^0 вероятности). События, образующие полную группу, попарно несовместны, поэтому можно применить теорему сложения. Имеем

$$P(E)=P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=$$
$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)=1. \blacksquare$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т. е.*

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

□ Противоположные события несовместны и образуют полную группу, а сумма вероятностей таких событий равна 1 (следствие 1). ■

Для решения задач удобно использовать следствие 2, записанное в виде $P(A)=1-P(\bar{A})$. Это связано с тем, что часто бывает трудно вычислить вероятность некоторого события A, а вероятность противоположного события $\bar{A}$ вычисляется легко. В таких случаях сначала вычисляют вероятность противоположного события, а уже затем вероятность самого события, используя приведенную выше формулу. Проиллюстрируем применение следствий теоремы сложения следующими задачами.

Задача 3.3. Бросаются три игральных кубика (можно один кубик три раза). Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 17?

△ В результате бросания трех игральных кубиков могут появиться 16 различных сумм очков от 3 до 18, которые образуют полную группу событий. Для решения задачи следует вычислить вероятности появления 14 сумм очков от 3 до 16, а затем сложить их. Это довольно трудоемкая операция. Поступим по-другому. Найдем вероятность выпадения 17 и 18 очков. При бросании трех кубиков возможно всего $N=6\cdot 6\cdot 6=216$ исходов; 18 очков могут выпасть только в одном случае, когда на всех кубиках 6 очков. Поэтому вероятность выпадения 18 очков равна 1/216. В трех случаях могут выпасть 17 очков. Это произойдет тогда, когда на одном из кубиков 5 очков, а на остальных по 6 очков. Следовательно, вероятность выпадения 17 очков равна 3/216. События «сумма выпавших очков меньше 17» и «сумма выпавших очков больше 16» являются противоположными. Обозначим их A и $\bar{A}$ соответственно. Тогда, по теореме сложения вероятностей, $P(\bar{A})=3/216+1/216=1/54$. Откуда

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-1/54=53/54. \blacktriangle$$

Задача 3.4. Среди одинаковых по внешнему виду 11 изделий находятся три бракованных. Произвольно вынимают три изделия. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно бракованное.

△ События «среди вынутых трех изделий хотя бы одно бракованное» и «среди вынутых трех изделий нет бракованных» являются противоположными. Обозначим их A и $\bar{A}$ соответственно. Найдем вероятность события $\bar{A}$. Число всех исходов испытания равно C_{11}^3, а число исходов, благоприятствующих событию $\bar{A}$, равно C_8^3 (из 11 изделий по условию 8 стандартных). Следовательно,

$$P(\bar{A})=C_8^3/C_{11}^3=56/165,$$

откуда

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-56/165=109/165. \blacktriangle$$

Рассмотренная выше теорема сложения вероятностей при вычислении вероятности суммы событий предусматривала их несовместность. Если же события совместны, то формула вероятности их суммы будет иной. Убедимся в этом при решении следующей задачи.

Задача 3.5. Отдел технического контроля проверяет на стандартность по двум параметрам серию изделий. Было установлено, что у 8 из 25 изделий не выдержан только первый параметр, у 6 изделий — только второй, а у 3 изделий не выдержаны оба параметра. Наудачу берется одно из изделий. Какова вероятность того, что оно не удовлетворяет стандарту?

△ Рассмотрим следующие события: A — «у изделия не выдержан первый параметр»; B — «у изделия не выдержан второй параметр»; C — «изделие не удовлетворяет стандарту». Событию AB, состоящему в том, что у взятой детали не выдержаны оба параметра, благоприятствуют три исхода. Событию A благоприятствуют $8+3=11$ исходов, а событию B благоприятствуют $6+3=9$ исходов. Число нестандартных изделий равно $8+6+3=11+9-3=17$. Следовательно, событию C благоприятствуют 17 исходов. Тогда

$$P(C)=17/25=(11+9-3)/25=11/25+9/25-3/25.$$

С другой стороны, $P(A)=11/25$, $P(B)=9/25$, $P(AB)=3/25$. Поэтому можно записать

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Наступление события C означает, что у взятого наудачу изделия либо не выдержан первый параметр, либо второй, либо оба вместе, т. е. $C=A+B$ (см. определение суммы событий). Таким образом, можно записать

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=17/25. \ \blacktriangle$$

Докажем справедливость последней формулы для общего случая.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т. е.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{3.3}$$

□ Докажем теорему для схемы случаев. Пусть в результате опыта возможны N равновозможных исходов, которые для наглядности изобразим в виде последовательности кружков (рис. 3.1). Пусть, далее, событию A благоприятствуют M исходов (им соответствуют кружки с горизонтальной чертой), а событию B — K исходов (им соответствуют кружки с вертикальной чертой). События A и B совместны, поэтому часть указанных исходов благоприятствуют одновременно и событию A, и событию B (им соответствуют кружки с крестиками). Предположим, что количество таких исходов равно L. Тогда

$$P(A)=M/N, \quad P(B)=K/N, \quad P(AB)=L/N. \tag{3.4}$$

Событие $A+B$ заключается в наступлении либо события A, либо события B, либо события AB. Поэтому ему будут

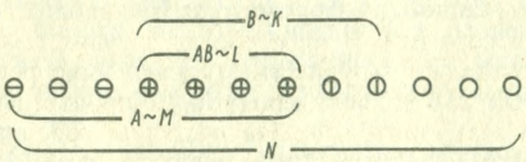

Рис. 3.1

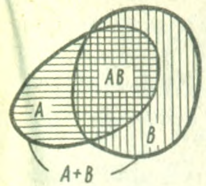

Рис. 3.2

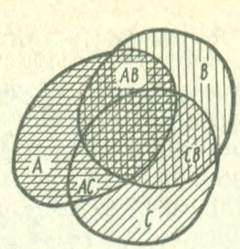

Рис. 3.3

благоприятствовать $M+K-L$ исходов (им соответствуют кружки либо с вертикальными, либо с горизонтальными линиями, либо с крестиками). Следовательно,

$$P(A+B)=(M+K-L)/N=M/N+K/N-L/N. \tag{3.5}$$

Подставляя равенства (3.4) в равенство (3.5), получим равенство (3.3). ■

Доказанная теорема хорошо иллюстрируется диаграммой Венна. Здесь следует помнить, что вероятность события пропорциональна площади фигуры, которая соответствует данному событию. Событию $A+B$ на рис. 3.2 соответствует фигура $A+B$, которая обведена жирной линией. Событию A соответствует фигура A, а событию B — фигура B. Фигура, имеющая двойную штриховку, соответствует событию AB. Из рис. 3.2 следует, что площади этих фигур связаны соотношением $S_{A+B}=S_A+S_B-S_{AB}$. Данное соотношение соответствует формуле (3.3).

Рассуждая аналогично и используя рис. 3.3, можно доказать справедливость формулы трех совместных в совокупности событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(CB)+P(ABC). \tag{3.6}$$

При доказательстве последней теоремы предполагалась совместность событий. Если же события A и B несовместны, то событие AB будет невозможным, а значит, его вероятность равна нулю. Поэтому формулы (3.1) и (3.3) совпадут. Таким образом, формулы (3.3) и (3.6) верны как для совместных, так и для несовместных событий.

При вычислении вероятности суммы совместных событий требуется, как видно из формул, уметь находить вероятность произведений событий. В простейших случаях (см. задачу 3.5) это не представляет трудности. Однако при решении более сложных задач нахождение вероятности произведения нескольких событий затруднительно. Нахождению вероятности произведения событий по известным вероятностям этих событий и посвящен следующий параграф.

§ 3.2. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий будем искать в виде произведения вероятностей, что вполне естественно, так как вероятность суммы событий выражается через сумму их вероятностей, а если эти события несовместны, то она равна сумме их вероятностей.

Пусть бросается игральный кубик. В результате этого испытания может наступить событие A, состоящее в выпадании четного числа очков, и может наступить событие B, состоящее в выпадании числа очков, меньшего 6. Эти события совместны, поэтому имеет смысл говорить о вероятности $P(AB)$ их совместного появления.

Найдем вероятности событий A, B и AB. Событию A благоприятствуют три исхода — A_2, A_4, A_6, событию B благоприятствуют пять исходов — A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а событию AB благоприятствуют два исхода — A_2, A_4 (см. пример 2.19). Поэтому $P(A)=3/6$, $P(B)=5/6$, $P(AB)=2/6$. Представим теперь вероятность $P(AB)$ в виде произведения, например вероятности $P(A)$ и неизвестной вероятности x, т. е. $P(AB)=P(A)x$. В данном случае нет оснований считать, что $x=P(B)$, так как $P(A)\cdot P(B)=5/12\neq P(AB)$. Найдем число x и выясним его вероятностный смысл. Имеем $x=P(AB)/P(A)=(1/3)/(1/2)=2/3$. Нетрудно заметить, что число 3 в знаменателе полученной дроби совпадает с числом исходов, благоприятствующих событию A, а два из них (это число стоит в числителе дроби) благоприятствуют событию B. Поэтому число $x=2/3$ соответствует вероятности события B, вычисленной с учетом только тех исходов испытания, которые благоприятствуют наступлению события A. Найденную при таких условиях вероятность события B назовем *условной* и обозначим $P_A(B)$. Таким образом, в данном случае $P_A(B)=2/3$, откуда $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$.

С другой стороны, событию B благоприятствуют пять исходов — A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Из них событию A благоприятствуют два исхода — A_2, A_4. Тогда $P_B(A)=2/5$ и, следовательно, выполняется равенство $P(AB)=P(B)P_B(A)$.

Прежде чем обобщить полученные результаты в виде теоремы, дадим определение условной вероятности. В приведенном примере события A и B могут наступить в результате одного испытания, поэтому условная вероятность $P_A(B)$ в таких случаях показывает, как часто появляется событие B среди тех исходов, в которых появляется событие A. В других случаях события A и B могут наступать в разных испытаниях, условия которых не обязательно должны совпадать. Здесь вероятность одного события также может зависеть от наступления другого.

Определение. *Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.*

Условную вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило, часто обозначают так: $P(B/A)$.

○ **Пример 3.1.** В ящике 7 одинаковых на ощупь шаров с номерами от 1 до 7. Наудачу один за другим берут два шара, не возвращая их обратно. Рассмотрим события: A — «первый вынутый шар имеет номер 3»; B — «второй вынутый шар имеет нечетный номер». Найдем условную вероятность $P_A(B)$. Если первый раз вынут шар под номером 3, то в ящике осталось 6 шаров, из которых 3 имеют нечетные номера (1, 5, 7). Следовательно, $P_A(B)=3/6=1/2$. ●

Если же вынутый шар в предыдущем примере возвращается назад в ящик, то условия второго испытания остаются неизменными после проведения первого испытания. Тогда $P(B)=P_A(B)=4/7$, т. е. в этом случае вероятность события B и его условная вероятность совпадают.

Рассмотрим теперь оба испытания как одно сложное. Запишем все исходы, благоприятствующие наступлению события A, в виде строки, составленной из двузначных чисел, где 1-я цифра означает номер шара, вынутого первым, а 2-я — номер шара, вынутого вторым. Имеем: 31; 32; 34; 35; 36; 37. Из этих шести исходов событию B благоприятствуют три исхода: 31; 35; 37. Поэтому $P_A(B)=3/6=1/2$. Таким образом, получен тот же самый результат.

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B). \qquad (3.7)$$

□ Докажем теорему для схемы случаев (см. рис. 3.1). Пусть в результате опыта возможны N исходов, M из которых благоприятствуют событию A, а K — событию B. Пусть, далее, L исходов благоприятствуют одновременному наступлению событий A и B. Тогда $P(A)=M/N$, $P(AB)=L/N$. Так как событию A благоприятствуют M исходов и только L из них благоприятствуют событию B, то условная вероятность $P_A(B)=L/M$. Полагая, что событие A может произойти в результате опыта, а это означает, что $M\neq 0$, получаем

$$P(AB)=L/N=(M/N)/(L/M)=P(A)P_A(B). \;\blacksquare$$

Задача 3.6. В коробке девять одинаковых радиоламп, три из которых были в употреблении. В течение рабочего дня мастеру для ремонта аппаратуры пришлось взять две радиолампы. Какова вероятность того, что обе взятые лампы были в употреблении?

△ Вероятность того, что первая взятая радиолампа была в употреблении (событие A), равна $P(A)=3/9$. После того как произошло событие A, в коробке осталось восемь радиоламп, из которых две были в употреблении. Поэтому для события B, состоящего в появлении второй раз радиолампы, бывшей в употреблении, условная вероятность $P_A(B)=2/8$. Следовательно, вероятность появления двух таких ламп

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=3/9\cdot 2/8=1/12.$$

Заметим, что задачу можно решить, если воспользоваться комбинаторикой. В том случае ответом на вопрос задачи является число $C_3^2/C_9^2=1/12$. ▲

Задача 3.7. Бросается игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное и меньшее 5 число очков?

△ Подсчитаем искомую вероятность непосредственно. Она равна $1/3$. Получим этот же результат, используя теорему умножения. Под событием A будем понимать появление четного числа очков, а под событием B — появление числа очков, меньшего 5. Событию A благоприятствуют исходы A_2, A_4, A_6, а событию B — исходы A_1, A_2, A_3, A_4. Поэтому $P(A)=3/6$, $P(B)=4/6=2/3$. Из трех исходов, благоприятствующих событию A, исходы A_2, A_4 благоприятствуют событию B. Следовательно, $P_A(B)=2/3$. Тогда, по теореме умножения,

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=3/6\cdot 2/3=1/3. \ ▲$$

В последней задаче наблюдается равенство вероятностей $P(B)$ и $P_A(B)$. Как видно из предыдущего (см. также пример 3.1), в одних случаях вероятность события и его условная вероятность совпадают, а в других различаются, причем совпадение или различие этих вероятностей наблюдается и для событий, которые могут наступать в одном испытании, и для событий, которые могут наступать в разных испытаниях. Другими словами, в одних случаях наступление события A изменяет вероятность наступления события B, а в других — нет. Если наступление события A изменяет вероятность наступления события B, то говорят о зависимости событий A и B.

Определение. *Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого, т. е.*

$$P(A)=P_B(A) \text{ или } P(B)=P_A(B).$$

Теорема. *Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей, т. е.*

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{3.8}$$

□ Пусть события A и B независимы; тогда должно выполняться равенство $P_A(B)=P(B)$. Подставляя это равенство в формулу $P(AB)=P(A)P_A(B)$, получаем

$$P(AB)=P(A)P(B). \ ■$$

Нетрудно доказать обратное утверждение.

Теорема. *Если для двух событий выполняется равенство* (3.8), *то эти события независимые.*

□ Пусть для событий A и B выполняется равенство (3.8). По теореме умножения вероятностей, $P(AB)=P(A)P_A(B)$. Тогда $P(AB)=P(A)P(B)=P(A)P_A(B)$, откуда $P(B)=P_A(B)$. Следовательно, события A и B независимые. ■

Если события наступают в разных испытаниях и условия этих испытаний не влияют друг на друга, т. е. наступление одного события не изменяет условий второго испытания, то события независимы.

Задача 3.8. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на первом кубике выпадет четное число очков, а на втором — число, меньшее 6?

△ Рассмотрим события: A — «на первом кубике выпало четное число очков»; B — «на втором кубике выпало число очков, меньшее 6». Для решения задачи необходимо найти $P(AB)$. Исходя из условий опыта можно сделать вывод, что события A и B независимы. Действительно, событие A наступает в первом испытании, а событие B — во втором. Испытания проводятся в одинаковых условиях, и наступление одного события не изменяет условий испытания, в результате которого может произойти другое. Очевидно, что $P(A)=3/6$, а $P(B)=5/6$. Тогда по теореме о вероятности произведения независимых событий находим

$$P(AB)=P(A)P(B)=3/6\cdot 5/6=5/12. \ ▲$$

Проверим теперь предположение о независимости событий A и B. Будем бросание двух кубиков рассматривать как одно сложное испытание. При бросании двух кубиков возможны $N=6\cdot 6=36$ исходов сложного испытания. Поставим в соответствие каждому такому исходу двузначное число, где первая цифра — число выпавших очков на первом кубике, а вторая цифра — на втором. Событию A благоприятствуют 18 исходов, так как каждому четному числу (2, 4, 6) очков, выпавших на первом кубике, будут соответствовать шесть двузначных чисел (исходов), где вторая цифра принимает значения от 1 до 6, т. е. $M=3\cdot 6=18$. Из каждых таких шести двузначных чисел пять будут благоприятствовать наступлению события B (последняя цифра должна принимать значения от 1 до 5). Таким образом, из 18 исходов, благоприятствующих наступлению события A, $L=3\cdot 5=15$ исходов благоприятствуют наступлению события B. Выпишем для наглядности все эти исходы: 21; 22; 23; 24; 25; 41; 42; 43; 44; 45; 61; 62; 63; 64; 65. Итак, $P(A)=M/N=18/36$, $P_A(B)=L/M=15/18$, а $P(AB)=P(A)P_A(B)=5/12$. Результаты совпали, значит, предположение о независимости событий было верным.

Задача 3.9. Вероятность поломки первого станка в течение смены равна 0,2, а второго — 0,13. Чему равна вероятность того, что оба станка потребуют наладки в течение смены?

△ Станки работают независимо друг от друга, поэтому событие (поломка первого станка) и событие B (поломка второго станка) независимы. Тогда

$$P(AB)=P(A)P(B)=0{,}2\cdot 0{,}13=0{,}026. \ \blacktriangle$$

Задача 3.10. Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого спортсмена равна 0,7, а второго — 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

△ Мишень будет поражена, если в нее попадет либо первый стрелок, либо второй, либо оба вместе, т. е. произойдет событие $A+B$, где событие A заключается в попадании в мишень первым спортсменом, а событие B — вторым. Тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94. \ \blacktriangle$$

Независимые события обладают рядом свойств. Докажем два из них.

1°. *Если события A и B независимы, то независимы события A и $\bar{B}$.*

□ Пусть события A и B независимы. Воспользуемся диаграммой Венна. Из рис. 3.4 видно, что $A=A\bar{B}+AB$. Очевидно, что события $A\bar{B}$ и AB несовместны, поэтому к ним можно применить теорему сложения вероятностей для несовместных событий. Имеем

$$P(A)=P(A\bar{B}+AB)=P(A\bar{B})+P(AB)=P(A\bar{B})+P(A)P(B),$$

откуда

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B})$$

или

$$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B}),$$

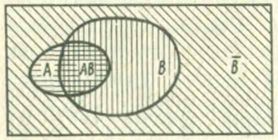

Рис. 3.4

т. е. события A и $\bar{B}$ независимы. ■

2°. *Если два события независимы, то независимы и противоположные им события.*

□ Это утверждение непосредственно следует из предыдущего. Приведем также другое доказательство. Пусть события A и B независимы. Наступление события $\bar{A}\bar{B}$ означает, что ни одно из событий A и B не наступило в результате опыта, а событие $A+B$ заключается в том, что наступило хотя бы одно из событий A и B. Следовательно, эти события противоположны. Тогда имеем

$$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

откуда в силу независимости событий A и B

$$P(\bar{A},\ \bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B).$$

Разложим на множители правую часть последнего равенства. В результате получим

$$P(\bar{A}\bar{B})=(1-P(A))(1-P(B))=P(\bar{A})P(\bar{B}),$$

что и означает независимость событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$. ■

Теперь докажем теорему умножения вероятностей для произвольного числа событий.

Теорема. *Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили, т. е.*

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}}(A_n), \quad (3.9)$$

где $P_{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность появления события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} произошли.

□ При доказательстве воспользуемся методом математической индукции. Для $n=2$ теорема уже доказана. Предположим, что она верна для $n-1$ событий, т. е.

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_{n-1})=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}}(A_{n-1}) \quad (3.10)$$

Обозначим через B произведение событий A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, т. е. $B=A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$. Тогда, согласно теореме умножения вероятностей, для двух событий имеем

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n)=P(B\cdot A_n)=P(B)P_B(A_n).$$

Так как, по предположению, верно равенство (3.10), то

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}}(A_n). \ \blacksquare$$

Отметим, что порядок входящих в произведение событий не играет роли. В частности, для трех событий формула (3.9) принимает вид

$$P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

наступлению события B. Выпишем для наглядности все эти исходы: 21; 22; 23; 24; 25; 41; 42; 43; 44; 45; 61; 62; 63; 64; 65. Итак, $P(A)=M/N=18/36$, $P_A(B)=L/M=15/18$, а $P(AB)=P(A)P_A(B)=5/12$. Результаты совпали, значит, предположение о независимости событий было верным.

Задача 3.9. Вероятность поломки первого станка в течение смены равна 0,2, а второго — 0,13. Чему равна вероятность того, что оба станка потребуют наладки в течение смены?

△ Станки работают независимо друг от друга, поэтому событие (поломка первого станка) и событие B (поломка второго станка) независимы. Тогда

$$P(AB)=P(A)P(B)=0{,}2\cdot 0{,}13=0{,}026. \ \blacktriangle$$

Задача 3.10. Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого спортсмена равна 0,7, а второго — 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

△ Мишень будет поражена, если в нее попадет либо первый стрелок, либо второй, либо оба вместе, т. е. произойдет событие $A+B$, где событие A заключается в попадании в мишень первым спортсменом, а событие B — вторым. Тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94. \ \blacktriangle$$

Независимые события обладают рядом свойств. Докажем два из них.

1°. *Если события A и B независимы, то независимы события A и $\bar{B}$.*

□ Пусть события A и B независимы. Воспользуемся диаграммой Венна. Из рис. 3.4 видно, что $A=A\bar{B}+AB$. Очевидно, что события $A\bar{B}$ и AB несовместны, поэтому к ним можно применить теорему сложения вероятностей для несовместных событий. Имеем

$$P(A)=P(A\bar{B}+AB)=P(A\bar{B})+P(AB)=P(A\bar{B})+P(A)P(B),$$

откуда

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B})$$

или

$$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B}),$$

т. е. события A и $\bar{B}$ независимы. ■

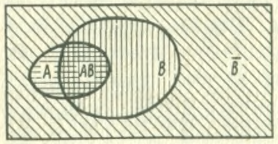

Рис. 3.4

2°. *Если два события независимы, то независимы и противоположные им события.*

□ Это утверждение непосредственно следует из предыдущего. Приведем также другое доказательство. Пусть события A и B независимы. Наступление события $\bar{A}\bar{B}$ означает, что ни одно из событий A и B не наступило в результате опыта, а событие $A+B$ заключается в том, что наступило хотя бы одно из событий A и B. Следовательно, эти события противоположны. Тогда имеем

$$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

откуда в силу независимости событий A и B

$$P(\bar{A},\ \bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B).$$

Разложим на множители правую часть последнего равенства. В результате получим

$$P(\bar{A}\bar{B})=(1-P(A))(1-P(B))=P(\bar{A})P(\bar{B}),$$

что и означает независимость событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$. ■

Теперь докажем теорему умножения вероятностей для произвольного числа событий.

Теорема. *Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили, т. е.*

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}}(A_n), \quad (3.9)$$

где $P_{A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность появления события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} произошли.

□ При доказательстве воспользуемся методом математической индукции. Для $n=2$ теорема уже доказана. Предположим, что она верна для $n-1$ событий, т. е.

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_{n-1})=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2A_3\ldots A_{n-2}}(A_{n-1}) \quad (3.10)$$

Обозначим через B произведение событий A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, т. е. $B=A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$. Тогда, согласно теореме умножения вероятностей, для двух событий имеем

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n)=P(B\cdot A_n)=P(B)P_B(A_n).$$

Так как, по предположению, верно равенство (3.10), то

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}}(A_n). \ \blacksquare$$

Отметим, что порядок входящих в произведение событий не играет роли. В частности, для трех событий формула (3.9) принимает вид

$$P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Задача 3.11. В гараж поступили 24 новые шины, предназначенные для определенной марки автомобиля. Шины имеют одинаковый внешний вид. Изготовлены они на двух различных заводах, причем 10 шин изготовлено на 1-м заводе, а остальные — на 2-м. Четырем водителям необходимо заменить по одной шине. Какова вероятность того, что первые три водителя воспользуются шинами 2-го завода, а четвертый — шиной 1-го завода?

△ Рассмотрим события: A — «первый водитель взял шину 2-го завода»; B — «второй водитель взял шину 2-го завода»; C — «третий водитель взял шину 2-го завода»; D — «четвертый водитель взял шину 1-го завода». Очевидно, вероятность события A равна $P(A)=14/24$. Если первый водитель взял шину 2-го завода, то осталось 23 шины, среди которых осталось 13 шин 2-го завода. Тогда $P_A(B)=13/23$. Если и второй водитель взял шину 2-го завода, то всех шин после этого осталось 22, из которых 12 шин 2-го завода. Следовательно, $P(C)=12/22$. Таким образом, после наступления событий A, B, C осталась 21 шина, среди которых 10 шин 1-го завода. Поэтому $P_{ABC}(D)=10/21$ и вероятность произведения событий A, B, C, D, по теореме умножения вероятностей для произвольного числа событий,

$$P(ABCD)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)P_{ABC}(D)=$$
$$=(14/24)(13/23)(12/22)(10/21)=65/759. \ \blacktriangle$$

Прежде чем доказать теорему умножения вероятностей для произвольного числа независимых событий, еще раз остановимся на понятии независимости событий. Из предыдущего изложения известно, что если появление одного из двух событий не изменяет вероятность появления другого, то такие события независимы. Если же вероятность появления одного события нарушается после появления другого, то такие события будем называть *зависимыми*. Другими словами, если для событий A и B справедливо неравенство $P(B)\neq P_A(B)$, а значит, и неравенство $P(AB)\neq P(A)P(B)$, то эти события зависимы.

Возникает вопрос: что понимать под независимостью трех (и более) событий? Рассмотрим для примера случай трех событий. Понятие независимости двух событий было связано с их произведением. По аналогии воспользуемся произведением событий и в этом случае. Произведение трех событий A, B, C можно представить в виде произведений двух событий AB и C, или AC и B, или BC и A, а для двух событий понятие независимости уже было определено. Естественно считать события независимыми или независимыми в совокупности, если независимы пары событий AB и C, AC и B, BC и A.

Достаточно ли для независимости в совокупности трех событий их попарной независимости? Приведенный ниже пример опровергает эту гипотезу.

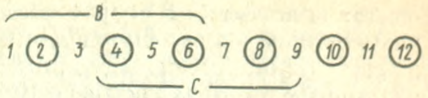

Рис. 3.5

○ **Пример 3.2.** Пусть на карточках, которые тщательно перемешаны, нанесены числа от 1 до 12. Вынимается наудачу одна карточка и рассматриваются следующие события: A — «появилось четное число»; B — «появилось число, меньшее 7»; C — «появилось число, большее 3 и меньшее 10». Для наглядности изобразим возможные исходы опыта на рис. 3.5. Нетрудно видеть, что $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$. Событие B может наступить в шести случаях при появлении чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, из которых три случая благоприятствуют появлению события A, а именно появлению чисел 2, 4, 6. Таким образом, $P_B(A)=1/2=P(A)$. Последнее равенство означает, что события A и B независимы. Рассуждая аналогично, можно доказать, что события A и C или C и B также независимы, т. е. события A, B, C попарно независимы.

Пусть теперь произошло событие BC. Оно может наступить, если появится одно из трех чисел 4, 5, 6, но появление только двух из них (4 и 6) благоприятствует событию A. Поэтому $P_{BC}(A)=2/3\neq 1/2$. Следовательно, события A и CB зависимы. Нетрудно показать, что $P_{CA}(B)=2/3\neq 1/2$, $P_{BA}(C)=2/3\neq 1/2$. Из последних соотношений следует зависимость событий CA и B, BA и C. Итак, на примере было показано, что из попарной зависимости трех событий не следует их зависимость в совокупности, поскольку вероятность одного события может измениться после наступления остальных. ●

На основании предыдущих рассуждений введем следующее определение.

Определение. *События называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если наряду с их попарной независимостью независимы любое из них и произведение любого числа из остальных, в противном случае события называются зависимыми.*

Из определения следует, что события независимы в совокупности, если вероятность появления одного из них не изменяется при появлении каких-либо других из оставшихся событий.

Теорема. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий, т. е.*

$$P(A_1A_2A_3\dots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\dots P(A_n). \qquad (3.11)$$

Доказательство теоремы предлагается провести самостоятельно.

Заметим, что для независимости в совокупности нескольких (больше двух) событий недостаточно выполнения равенства (3.11).

○ **Пример 3.3.** На карточках, которые тщательно перемешаны, нанесены числа от 1 до 8. Наудачу вынимается одна из карточек. Рассмотрим следующие события: A — «появилось число, меньшее 5»; B — «появилось число, большее 1, но меньшее 6»; C — «появилось число, большее 3, но меньшее 8». Очевидно, что $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$ и $P(A)P(B)P(C)=1/8$. Событию ABC благоприятствует только один исход — появление числа 4. Следовательно, $P(ABC)=1/8$ и $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$. Далее находим: $P_A(B)=3/4$, $P_{AB}(C)=1/3$, т. е. $P(B)\neq P_A(B)$, $P(C)\neq P_{AB}(C)$. Это говорит о том, что события A, B, C являются зависимыми, несмотря на выполнение равенства (3.11). ●

В дальнейшем понадобится ответ на вопрос: сохранится ли независимость в совокупности нескольких событий, если одно из них заменить ему противоположным? Для двух событий такая замена не изменяет их независимость, что было показано ранее (см. свойства 1^0 и 2^0 независимых событий). Убедимся теперь, что таким же свойством обладает и группа, состоящая из трех событий.

Пусть события A, B, C независимы в совокупности. Тогда такие пары событий, как, например, B и C, A и C, A и B, A и BC, будут независимыми, а значит, независимы и пары событий C и $\bar{A}$, B и $\bar{A}$, $\bar{A}$ и BC (см. свойство 1^0 независимых событий). Следовательно, имеют место равенства $P(C)=P_B(C)$; $P(\bar{A})=P_C(\bar{A})$; $P(B)=P_{\bar{A}}(B)$; $P(\bar{A})=P_{BC}(\bar{A})$. По теореме умножения вероятностей, для событий $\bar{A}$, B, C имеем

$$P(\bar{A}BC)=P(B)P_B(C)P_{BC}(\bar{A})=P(B)P(C)P(\bar{A});$$

$$P(\bar{A}BC)=P(C)P_C(\bar{A})P_{C\bar{A}}(B)=P(C)P(\bar{A})P_{C\bar{A}}(B);$$

$$P(\bar{A}BC)=P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)P_{\bar{A}B}(C)=P(\bar{A})P(B)P_{\bar{A}B}(C).$$

Сравнивая полученные равенства заключаем, что $P_{C\bar{A}}(B)=P(B)$, $P_{\bar{A}B}(C)=P(C)$. Последние равенства означают независимость событий B и $C\bar{A}$, C и $\bar{A}B$. Таким образом, все условия независимости событий $\bar{A}$, B, C выполнены. Из независимости событий $\bar{A}$, B, C сразу же следует независимость событий $\bar{A}$, $\bar{B}$, C и $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$.

Итак, если три события независимы в совокупности, то эта независимость сохраняется и при замене любого числа из них на противоположные. Доказательство этого утверждения можно легко распространить на большее число событий. Рассмотренное свойство независимых событий часто используют на практике (см., например, задачу 3.12 и вывод формулы Бернулли в § 4.1).

При решении многих задач событие, вероятность которого следует найти, приходится представлять в виде суммы нескольких событий. Такое представление может быть громоздким и сопряжено с большими вычислениями. В том случае, когда противоположное событие представляется в виде суммы меньшего числа событий, имеет смысл воспользоваться вычислением вероятности противоположного события (см. задачи 3.3 и 3.4).

Задача 3.12. В трех залах кинотеатра идут три различных фильма. Вероятность того, что на определенный час в кассе 1-го зала есть билеты, равна 0,3, в кассе 2-го зала — 0,2,

а в кассе 3-го зала — 0,4. Какова вероятность того, что на данный час имеется возможность купить билет хотя бы на один фильм?

△ Обозначив A — «билеты есть хотя бы в одной кассе»; A_i — «билеты есть в i-й кассе, $i=1, 2, 3$», можно записать $A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+ +A_1A_2A_3$ (см. пример 2.20).

Выражение для A в данном случае довольно громоздкое, оно стало бы еще сложнее, если бы в кинотеатре было четыре зала. Такой путь решения из-за своей сложности нецелесообразен. Поэтому рассмотрим событие $\bar{A}$, противоположное A. Оно наступит тогда, когда наступит событие $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. Таким образом, $\bar{A}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, откуда

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=$$
$$=1-0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}664. \ \blacktriangle$$

При решении подобных задач следует использовать рассмотренный в задаче 3.12 способ, который обобщим в виде теоремы, приведенной ниже без доказательства.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1A_2A_3$, ..., A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, ..., $\bar{A}_n$, т. е.*

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)\ldots P(\bar{A}_n). \quad (3.12)$$

§ 3.3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

На практике часто возникают ситуации, когда требуется определить вероятность события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу. Доказанная ниже теорема, являющаяся следствием теорем сложения и умножения вероятностей, допускает нахождение вероятности подобных событий и дает для этого формулу.

Теорема. *Вероятность события A, которое может наступить только при условии появления одного из событий H_1, H_2, H_3, ..., H_n, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий H_1, H_2, H_3, ..., H_n на соответствующую условную вероятность события A, т. е.*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A). \quad (3.13)$$

□ Согласно условию теоремы, событие A может наступить, если появится одно из событий H_1, H_2, H_3, ..., H_n. Это означает, что появление события A влечет появление одного из событий H_1A, H_2A, H_3A, ..., H_nA, неважно какого. Поэтому событие A можно представить в виде $A=H_1A+H_2A+$ $+H_3A+...+H_nA$. Так как события H_1, H_2, H_3, ..., H_n, по условию, попарно несовместны, то, очевидно, несовместны и события H_1A, H_2A, H_3A, ..., H_nA. Тогда, применяя теорему сложения для несовместных событий, получаем

$$P(A)=P(H_1A)+P(H_2A)+P(H_3A)+...+P(H_nA).$$

Далее, по теореме умножения вероятностей, можно записать

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)+...$$

$$...+P(H_n)P_{H_n}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A). \blacksquare$$

Формула (3.13), в справедливости которой убеждает доказанная теорема, называется *формулой полной вероятности*, а события H_1, H_2, H_3, ..., H_n — *гипотезами*.

Задача 3.13. На трех станках различной марки изготовляется определенная деталь. Производительность 1-го станка за смену составляет 40 деталей, 2-го — 35 деталей, 3-го — 25 деталей. Установлено, что 2, 3 и 5% продукции этих станков соответственно имеют скрытые дефекты. В конце смены на контроль взята одна деталь. Какова вероятность, что она нестандартная?

Пусть A — событие, состоящее в том, что взятая наудачу деталь имеет дефект. Здесь возможны следующие три гипотезы:

1) деталь изготовлена на 1-м станке (гипотеза H_1);
2) деталь изготовлена на 2-м станке (гипотеза H_2);
3) деталь изготовлена на 3-м станке (гипотеза H_3).

Найдем вероятности гипотез: $P(H_1)=40/100$, $P(H_2)=35/100$, $P(H_3)=25/100$. Условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно равны $P_{H_1}(A)=2/100$, $P_{H_2}(A)=3/100$, $P_{H_3}(A)=5/100$. По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=$$

$$=40/100\cdot 2/100+35/100\cdot 3/100+25/100\cdot 5/100=0{,}031. \blacktriangle$$

Задача 3.14. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех параллельных группах. В 1-й группе, где 30 учащихся, оказалось 8 работ, выполненных на «отлично»; во 2-й, где 28 учащихся,— 6 работ; в 3-й, где 27 учащихся,— 9 работ. Найти вероятность того, что первая взятая наудачу при повторной проверке работа из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу, окажется выполненной на «отлично».

$\triangle$ Рассмотрим события: A — «взятая работа выполнена на «отлично»; H_i — «работа выполнена учащимся i-й группы, где $i=1, 2, 3$». Очевидно, $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$ и $P_{H_1}(A)=8/30$, $P_{H_2}(A)=6/28$, $P_{H_3}(A)=9/27$. Применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=$$

$$=1/3\cdot 8/30+1/3\cdot 6/28+1/3\cdot 9/27=1/3\cdot(4/15+3/14+1/3)=$$

$$=57/210=19/70. \blacktriangle$$

В последней задаче искомая вероятность события равна среднему арифметическому условных вероятностей этих событий. Это имеет место потому, что равны вероятности гипотез.

При выводе формулы полной вероятности предполагалось, что событие A, вероятность которого следовало определить, могло произойти с одним из событий H_1, H_2, H_3, ..., H_n, образующих полную группу, при этом вероятности указанных событий (гипотез) были известны заранее. Предположим, что проведен опыт и событие A наступило. Установим, как изменятся после этого вероятности гипотез, т. е. найдем условную вероятность $P_A(H_3)$ для каждой гипотезы.

По теореме умножения имеем

$$P(AH_i)=P(A)P_A(H_i)=P(H_i)P_{H_i}(A), \quad i=1, 2, 3, ..., n,$$

или

$$P(A)P_A(H_i)=P(H_i)P_{H_i}(A).$$

Отсюда

$$P_A(H_i)=P(H_i)P_{H_i}(A)/P(A).$$

Воспользовавшись формулой (3.13), имеем

$$P_A(H_i)=P(H_i)P_{H_i}(A)\Big/\sum_{j=1}^{n}P(H_j)P_{H_j}(A), \quad j=1, 2, 3, ..., n. \quad (3.14)$$

Полученная формула называется *формулой Байеса* или *теоремой гипотез*. Формула Байеса позволяет «пересмотреть» вероятности гипотез после того, как становится известным результат опыта, в результате которого появилось событие A.

Задача 3.15. Две перфораторщицы набивают на одинаковых и исправных перфораторах перфокарты. Более опытная из них обрабатывает в среднем 60% перфокарт из предложенной партии, а менее опытная — 40%. Вероятность того, что опытная перфораторщица допустит ошибку при перфорировании одной перфокарты, равна 0,03, для менее опытной эта вероятность равна 0,05. Взятая на контроль перфокарта оказалась с ошибкой. Какова вероятность того, что ошиблась более опытная перфораторщица?

△ Пусть событие A состоит в том, что наудачу взятая перфокарта оказалась с ошибкой. Можно высказать два предположения: 1) перфокарту подготовила опытная перфораторщица (гипотеза H_1); 2) перфокарту подготовила менее опытная перфораторщица (гипотеза H_2). По условию задачи, $P(H_1)=0{,}6$, $P(H_2)=0{,}4$, $P_{H_1}(A)=0{,}03$, $P_{H_2}(A)=0{,}05$. Используя формулу Байеса, находим вероятность

$$P_A(H_1)=P(H_1)P_{H_1}(A)/(P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A))=$$
$$=0{,}6\cdot 0{,}03/(0{,}6\cdot 0{,}03+0{,}4\cdot 0{,}05)=9/19. \ ▲$$

Формула Байеса имеет следующее применение. Пусть имеется несколько предположений (несовместных гипотез) для объяснения некоторого явления. Эти предложения проверяются с помощью опыта. Перед началом опыта (эксперимента) зачастую бывает трудно определить вероятности этих предположений — гипотез, которые обычно называют *доопытными (априорными)* вероятностями. Поэтому этим гипотезам приписывают из интуитивных или каких-либо других соображений определенные вероятности. Затем проводят эксперимент и получают первую информацию, на основании которой выполняют коррекцию доопытных вероятностей.

Таким образом, основываясь на результатах опыта, заменяют доопытные вероятности *послеопытными (апостериорными)* вероятностями. При этом вероятности гипотез после опыта могут измениться. Вероятности некоторых гипотез могут настолько уменьшиться, что в дальнейшем ими вообще можно пренебречь, что, например, имеет место при решении следующей задачи. Эксперимент можно продолжать далее (повторить опыт), в результате по мере получения новой информации будет укрепляться предположение о справедливости той или иной гипотезы.

В настоящее время с внедрением совершенной вычислительной техники практически во все сферы деятельности человека формула Байеса находит все более широкое применение при решении проблем управления в экономике и промышленности, связанных с недостаточной информацией. По мере поступления информации и ее накопления проводится корректировка различных решений и планов.

Задача 3.16. Электронный прибор содержит две микросхемы. Вероятность выхода первой микросхемы в течение определенного (достаточно большого) времени равна 0,2, а второй — 0,1. Известно, что из строя вышла одна микросхема. Какова вероятность того, что это первая микросхема?

△ Пусть событие A состоит в том, что по истечении определенного срока вышла из строя одна микросхема. Эксперимент (наблюдение над прибором в течение указанного

срока) может закончиться одним из следующих несовместных исходов: H_1 — «обе микросхемы выдержали испытание»; H_2 — «отказала только первая микросхема»; H_3 — «отказала только вторая микросхема»; H_4 — «отказали обе микросхемы». Других исходов, очевидно, быть не может. Следовательно, указанные исходы образуют полную группу событий.

Можно высказать предположение, что эксперимент закончится одним из этих исходов, поэтому исходы H_1, H_2, H_3, H_4 будем считать гипотезами. Используя теорему умножения вероятностей и понятие противоположных событий, имеем $P(H_1)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72$; $P(H_2)=0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}18$; $P(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}1=0{,}08$; $P(H_4)=0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}02$. Условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно равны: $P_{H_1}(A)=0$; $P_{H_2}(A)=1$; $P_{H_3}(A)=1$; $P_{H_4}(A)=0$.

Применяя теперь формулу Байеса, получим

$$P_A(H_2)=P(H_2)P_{H_2}(A)\Big/\sum_{i=1}^{4} P(H_i)P_{H_i}(A)=$$
$$=0{,}18\cdot 1/(0{,}18\cdot 1+0{,}08\cdot 1)=9/13.$$

Следовательно, вероятность того, что отказала только первая микросхема, равна 9/13. Рассуждая аналогично, получим $P_A(H_1)=0$, $P_A(H_3)=4/13$, $P_A(H_4)=0$. Оказалось, что две послеопытные вероятности равны нулю. Кроме того, можно заметить, что в задаче 3.15 вероятность гипотезы H_1 после опыта уменьшилась, так как $P(H_1)=0{,}6=57/95$, $P_A(H_1)=9/19=45/95$, а в задаче 3.16 вероятность гипотезы H_2 увеличилась, поскольку $P(H_2)=0{,}18=9/50$, $P_A(H_2)=9/13$. Возможность таких ситуаций уже предполагалась ранее. ▲

Не анализируя условие предыдущей задачи, можно было высказать только две гипотезы H_2 и H_3, не приняв во внимание гипотезы H_1 и H_4. Это было бы довольно правдоподобно, однако подобные «просчеты» могут привести к грубым ошибкам. Поэтому при решении задач следует помнить, что высказанные гипотезы должны образовывать полную группу, а значит, сумма их доопытных и послеопытных вероятностей должна быть равна единице.

ГЛАВА 4
ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 4.1. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание (опыт) испытания повторяется многократно.

Например, стрелок, не сходя с места, каждый раз тщательно прицеливаясь, производит несколько выстрелов по мишени или несколько человек заполняют по одной карточке «Спортлото». В результате каждого такого испытания может наступить или не наступить некоторое событие A. В результате одного выстрела (испытания) мишень может быть поражена (событие A) или нет (событие $\bar{A}$). В результате заполнения одной карточки «Спортлото» (испытания) можно отгадать все шесть номеров (событие A) или не отгадать все номера (событие $\bar{A}$). Можно предположить, что в приведенных ситуациях вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же (для каждой ситуации своя). Модель каждой из этих ситуаций выглядит следующим образом. Проводится n испытаний, в каждом из которых событие A может произойти или не произойти, причем вероятность события в каждом отдельном испытании постоянна, т. е. не меняется от испытания к испытанию. Вопрос о том, как находятся вероятность события в отдельном испытании, уже был рассмотрен. Поэтому представляет особый интерес появление любого определенного числа раз события A в n испытаниях, точнее, вероятность появления этого числа. Рассмотрению задач, в которых требуется определить вероятность m появлений события A в результате n испытаний, и посвящена настоящая глава. Подобные задачи решаются сравнительно легко, если испытания являются независимыми.

Определение. *Несколько испытаний называются независимыми относительно события A, если вероятность события A в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.*

Примером независимых испытаний может служить несколько подбрасываний монеты. Несколько последовательных выниманий из урны одинаковых на ощупь, но разных по цвету шаров, также являются независимыми испытаниями, например относительно появления белого шара, если шары каждый раз возвращаются назад и тщательно перемешиваются.

Возникает вопрос: как связаны независимость испытаний и независимость событий, которые могут произойти в результате этих испытаний? Пусть проводятся n независимых испытаний, в которых событие A может наступить или не наступить. Это означает, что в результате каждого испытания может произойти событие A, причем его вероятность не изменяется от того, какие события произойдут в остальных испытаниях. Не исключена возможность, что во всех этих испытаниях произойдет событие A. Обозначим через A_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, событие A, если оно произошло в i-м испытании.

Из определений независимости испытаний и независимости событий в совокупности следует, что события A_1, A_2, A_3, ..., A_n независимы в совокупности. Однако совсем не обязательно, чтобы во всех испытаниях произошло событие A.

Пусть для определенности в пяти независимых испытаниях два раза произошло событие A, причем наступило оно во 2-м и 5-м испытаниях. Это означает, что в пяти испытаниях наступили события $\bar{A}_1$, A_2, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$, A_5. А так как при замене

любого числа событий из группы независимых в совокупности событий на противоположные им события независимость событий сохраняется (см. § 3.2), то представленная группа событий также независима в совокупности.

Практически событие A может появиться в n независимых испытаниях любое число раз в разных последовательностях или комбинациях, чередуясь с противоположным событием $\bar{A}$. Такая группа событий независима в совокупности. Таким образом, из независимости n испытаний относительно события A следует независимость в совокупности группы n событий, представляющей собой произвольную комбинацию событий A и $\bar{A}$, одно из которых обязательно произойдет в каждом из рассматриваемых испытаний.

По теореме умножения вероятностей для независимых событий, вероятность совместного наступления таких событий равна произведению их вероятностей, т. е. выполняется, например, равенство

$$P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\ldots\bar{A}_n)=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)\ldots P(\bar{A}_n).$$

Рассмотрим одну из ситуаций, в которой событие может произойти в любом из нескольких независимых событий.

○ **Пример 4.1.** Монета в неизменных условиях бросается три раза. Пусть событие A состоит в выпадании «герба». Естественно считать эти подбрасывания независимыми испытаниями. Вероятность появления «герба» в каждом единичном испытании, очевидно, постоянна и равна 1/2.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации налицо независимые испытания, в каждом из которых вероятность события A постоянна и от испытания к испытанию не меняется. Такие испытания обычно называют *испытаниями Бернулли* или *схемой Бернулли.* Найдем теперь вероятность того, что два раза появится «герб». Обозначим: A_i — «в i-м испытании появился «герб»; $\bar{A}_i$ — «в i-м испытании появилась решка».

При трехкратном бросании монеты возможны следующие восемь исходов: $A_1A_2A_3$; $\bar{A}_1A_2A_3$; $A_1\bar{A}_2A_3$; $A_1A_2\bar{A}_3$; $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$; $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$; $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ — и только три из них, а именно: $\bar{A}_1A_2A_3$, $A_1\bar{A}_2A_3$, $A_1A_2\bar{A}_3$ — благоприятствуют событию B, состоящему в двукратном появлении «герба» в трех испытаниях. Следовательно, можно записать $B=\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3$. Таким образом, событие B наступит, если первый раз появится решка, а второй и третий — «герб»; первый и третий раз появится «герб», а второй — решка; первый и второй раз появится «герб», а последний — решка. Так как эти варианты несовместны и все события, входящие в произведения, независимы, то по теоремам умножения и сложения вероятностей имеем

$$P(B)=P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(A_1A_2\bar{A}_3)=$$
$$=3\cdot 1/2\cdot 1/2\cdot 1/2=3/8. \ ●$$

Этот же результат можно получить, если воспользоваться классической формулой вероятности. Действительно, все перечисленные выше восемь исходов трехкратного бросания монеты равновозможны и только три из них благоприятствуют событию B. Поэтому $P(B)=M/N=3/8$.

При увеличении числа бросаний монеты количество исходов увеличивается, а следовательно, возрастает трудность вычисления необходимых вероятностей.

Выработаем теперь общий метод решения подобных задач, позволяющий с минимальными вычислительными затратами получить требуемый результат. Поставим задачу в общем виде. Пусть в результате испытания возможны два исхода: либо появится событие A, либо противоположное ему событие $\bar{A}$. Проведем n испытаний Бернулли. Напомним, это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события A в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т. е. испытания проводятся в одинаковых условиях). Обозначим вероятность $P(A)$ появления события A в единичном испытании буквой p, т. е. $P(A)=p$, а вероятность $P(\bar{A})$ — буквой q, т. е. $P(\bar{A})=1-P(\bar{A})=1-p=q$.

Найдем вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз (ненаступления $n-m$ раз) в этих n испытаниях. Отметим, что здесь не требуется появление m раз события A в определенной последовательности.

Обозначим: A_i — появление события A в i-м опыте; $\bar{A}_i$ — непоявление события A в i-м опыте, где $i=1, 2, 3, \ldots, n$.

Для одного испытания возможны следующие два исхода: A, $\bar{A}$. Вероятности этих исходов выпишем в виде следующей таблицы:

События	A	$\bar{A}$
Вероятность	p	q

Очевидно, $P_1(1)=p$; $P_1(0)=q$ и $P_1(1)+P_1(0)=(p+q)^1=1$.

Для двух испытаний возможны следующие $4=2^2$ исхода: A_1A_2, $\bar{A}_1A_2$, $A_1\bar{A}_2$, $\bar{A}_1\bar{A}_2$. Вероятность этих исходов также выпишем в виде таблицы:

События	A_1A_2	$A_1\bar{A}_2$	$\bar{A}_1A_2$	$\bar{A}_1\bar{A}_2$
Вероятность	p^2	pq	pq	q^2

Очевидно, $P_2(2)=p^2$, $P_2(1)=P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1A_2)=2pq$, $P_2(0)=q^2$ и $P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=p^2+2pq+q^2=(p+q)^2=1$.

Для трех испытаний возможны следующие $8=2^3$ исходов: $A_1A_2A_3$, $\bar{A}_1A_2A_3$, $A_1\bar{A}_2A_3$, $A_1A_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$, $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$, $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. Вероятности этих исходов запишем в виде таблицы:

События	$A_1A_2A_3$	$\bar{A}_1A_2A_3$	$A_1\bar{A}_2A_3$	$A_1A_2\bar{A}_3$	$\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$
Вероятность	p^3	p^2q	p^2q	p^2q	pq^2

События	$\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$	$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$	$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$
Вероятность	pq^2	pq^2	q^3

Очевидно, $P_3(3)=p^3$, $P_3(2)=P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(A_1A_2\bar{A}_3)=3p^2q$, $P_3(1)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=3pq^2$, $P_3(0)=q^3$ и $P_3(3)+P_2(2)+P_3(1)+P_3(0)=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=(p+q)^3=1$. Анализируя эти случаи, можно сделать общий вывод: вероятность $P_n(m)$ пропорциональна произведению p^mq^{n-m}, причем коэффициент пропорциональности равен C_n^m, т. е.

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Полученную формулу можно доказать используя метод математической индукции. Однако в качестве доказательства приведем следующие рассуждения.

Пусть проведено n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить и не наступить. Если в результате испытаний событие A произошло m раз (неважно, в каком порядке), то это означает, что совместно наступили m событий A и $n-m$ событий $\bar{A}$, вероятности которых в каждом отдельном опыте равны p и q соответственно. Так как все n событий независимы, то, по теореме умножения, вероятность появления m раз события A в определенной последовательности равна p^mq^{n-m}.

Однако событие A может появиться m раз в n опытах в совершенно другой последовательности и число таких последовательностей равно числу сочетаний из n по m, т. е. C_n^m (это число совпадает с числом способов, которыми можно выбрать m мест из имеющихся n, не учитывая их порядка). Все C_n^m вариантов появления события A m раз представляют собой несовместные события, вероятность каждого из которых равна p^mq^{n-m}. А так как наступление одного (любого) из этих событий означает наступление события, состоящего в том, что в n независимых испытаниях событие A появится m раз, то, по теореме сложения вероятностей для несовместных событий, искомая вероятность $P_n(m)$ равна сумме вероятностей всех указанных несовместных событий, т. е. произведению $C_n^m p^m q^{n-m}$.

Таким образом,

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}. \tag{4.1}$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*.

Проиллюстрируем применение формулы (4.1).

Задача 4.1. Монету бросают 8 раз. Какова вероятность, что 4 раза выпадет «герб»?

△ Как правило, на вопрос задачи отвечают, что эта вероятность равна 1/2. Однако это ошибочный ответ. Действительно, здесь $n=8$, $m=4$, $p=q=1/2$. По формуле (4.1) получаем

$$P_8(4)=C_8^4(1/2)^4(1/2)^4=70/256<1/3. \ ▲$$

Задача 4.2. Вероятность изготовления на станке-автомате нестандартной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых шести деталей окажется более четырех стандартных?

△ Здесь $n=6$, $p=0{,}02$, $q=1-p=0{,}98$. Появление более четырех стандартных деталей означает, что среди взятых шести деталей пять или шесть стандартных, т. е. одна или ноль бракованных. По теореме сложения вероятностей,

$$P_6(0\leqslant m<1)=P_6(0)+P_6(1)=$$
$$=C_6^0(0{,}02)^0(0{,}98)^6+C_6^1(0{,}02)^1(0{,}098)^5\approx 0{,}9943.\ ▲$$

§ 4.2. Асимптотические формулы

При решении задач 4.1, 4.2 особых трудностей при вычислении искомых вероятностей не возникало, так как число испытаний n было невелико. Однако если число испытаний достаточно велико, то использование формулы (4.1) нецелесообразно в силу необходимости выполнения громоздких вычислений. Пусть, например, требуется вычислить P_{320} (285) (при $p=0{,}89$). В данном случае формула (4.1) принимает вид

$$P_{320}(285)=\frac{320!}{285!\,35!}(0{,}89)^{285}(0{,}11)^{35}.$$

Получить по указанной формуле более или менее точный результат практически невозможно.

В этом параграфе рассматриваются специальные методы, с помощью которых можно получить достаточно точные ответы в задачах, связанных с повторением испытаний, не прибегая к сложным вычислениям. Суть первого метода заключается в применении локальной теоремы Муавра—Лапласа, дающей асимптотическую формулу, которая позволяет вычислить вероятность приближенно.

Локальная теорема Муавра—Лапласа. *Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаниях равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна (чем больше n, тем точнее) значению функции $y=\frac{1}{\sqrt{npq}}f(u)$, где*

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2},\quad u=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

т. е.

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}f\left(u=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^{*)}. \qquad (4.2)$$

Значение функции $f(u)$ для любого аргумента u можно получить разложив ее в степенной ряд, однако в этом нет необходимости, так как ее значения можно найти из специальной таблицы. При использовании этой таблицы следует помнить, что функция $f(u)$ четная, т. е. $f(-u)=f(u)$. Более подробно эта функция рассматривается в § 6.2.

Задача 4.3. Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей 356 окажутся стандартными.

△ Согласно условию задачи, $n=400$, $m=356$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$. По формуле (4.2) находим

$$p_{400}(356)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}f(u)=\frac{1}{6}f(u).$$

Далее из условия задачи следует, что

$$u=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{356-400\cdot 0{,}9}{6}\approx -0{,}67.$$

По табл. П.1**), учитывая, что $f(-u)=f(u)$, находим $f(-0{,}67)=$ $=0{,}3187$. Искомая вероятность

$$P_{400}(356)\approx 0{,}3187/6\approx 0{,}0531.\ ▲$$

Такое небольшое значение полученной вероятности, несмотря на то что вероятность появления стандартной детали равна 0,9, объясняется тем, что была вычислена вероятность только одного из 401 исходов сложного испытания, состоящего в отборе 400 деталей.

Задача 4.4. Два спортсмена играют в настольный теннис. Вероятность выигрыша первого спортсмена равна 5/9. Какова вероятность того, что он выиграет две партии из пяти?

△ По условию, $p=5/9$, $q=4/9$, $n=5$, $m=2$. Воспользуемся формулой (4.2). Имеем

$$P_5(2)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}f(u)=\frac{1}{\sqrt{5\cdot(5/9)\cdot(4/9)}}f(u)=0{,}9f(u).$$

Найдем значение аргумента

---

*) «Грубое» правило для применения формулы (4.2) вместо формулы Бернулли (4.1) состоит в том, что n должно иметь порядок не менее нескольких десятков, а лучше нескольких сотен, а произведение $np>10$.

**) Запись П.1, П.2 и т. д. здесь и далее означает ссылку на табл. 1, табл. 2 и т. д. Приложений.

$$u=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{2-5\cdot 5/9}{10/9}=-0{,}7.$$

По табл. П.1 находим $f(-0{,}7)=0{,}3123$. Искомая вероятность

$$P_5(2)\approx 0{,}9\cdot 0{,}3123\approx 0{,}281.$$

Проверим полученный результат, воспользовавшись формулой Бернулли. Имеем

$$P_5(2)=C_5^2(5/9)^2(4/9)^3\approx 0{,}271.\ \blacktriangle$$

Расхождение ответов объясняется тем, что формула (4.2) дает хорошее приближение при больших значениях n, а в данном случае оно равно 5. Формула (4.2) позволяет получить более близкие к точному значению $P_n(m)$ результаты, чем больше значение $\sqrt{npq}$ и чем ближе значения p и q к 0,5.

Если вероятность события p (или q) в отдельном испытании близка к нулю (такие события называются *редкими*), то даже при большом числе испытаний n, но небольшой величине произведения np (меньше 10) вероятности $P_n(m)$, полученные по формуле (4.2), недостаточно близки к их истинным значениям. В таких случаях применяют другую асимптотическую формулу — формулу Пуассона, справедливость которой доказывает следующая теорема.

Теорема. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $np=\lambda$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна $\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, т. е.*

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \tag{4.3}$$

Формула (4.3) называется *формулой Пуассона.*

□ Для вычисления вероятности $P_n(m)$ воспользуемся формулой Бернулли. Имеем

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}p^m q^{n-m}.$$

Так как, по условию, $np=\lambda$, то $p=\lambda/n$. Тогда

$$P_n(m)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

Так как, по условию, n велико, то найдем предел правой части последнего равенства при $n\to\infty$. При этом будет получено приближенное значение вероятности $P_n(m)$. Итак,

$$P_n(m)\approx\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\dots\left(\frac{n-m+1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=$$

$$=\frac{\lambda^n}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Здесь пределы всех сомножителей, кроме последнего (второго замечательного предела), равны 1. Окончательно имеем

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.\ \blacksquare$$

Условия теоремы требуют, чтобы вероятность события p была мала, а число испытаний n велико. Обычно указанную формулу используют, когда $n\geqslant 10$, лучше $n\geqslant 100$, а $np<10$.

Задача 4.5. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течение 1 ч работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 100 ч работы устройства придется пять раз менять микросхему?

△ По условию, $n=1000$, $p=0{,}004$, а $\lambda=np=1000\cdot 0{,}004=4<10$. Для нахождения вероятности $P_{1000}(5)$ воспользуемся формулой Пуассона, так как условия ее применения выполнены. Имеем

$$P_{1000}(5)\approx\frac{4^5e^{-4}}{5!}\approx 0{,}1563.$$

Найдем вероятность того же события по формуле (4.2). Значение u равно

$$u=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{5-4}{\sqrt{1000\cdot 0{,}004\cdot 0{,}966}}\approx\frac{1}{1{,}996}\approx 0{,}501.$$

Из табл. П.1, следует, что $f(u)\approx 0{,}3521$. Тогда

$$P_{1000}(5)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}f(u)\approx 0{,}3521/1{,}996\approx 0{,}1764.$$

Значение искомой вероятности по формуле Бернулли равно

$$C_{1000}(5)=C_{1000}^{5}(0{,}004)^{5}(0{,}996)^{995}\approx 0{,}1566.$$

Как видно из полученных результатов, формула (4.3) дает более точный результат, чем формула (4.2). ▲

ГЛАВА 5
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 5.1. Понятие случайной величины

В практической жизни часто приходится сталкиваться с различными величинами. Так, например, при покупке авиабилета нас интересуют величина его стоимости и продолжительность полета. Для выпечки торта необходимо знать его рецепт, т. е. количество муки, сахара, масла и т. д., необходимое на приготовление теста. Значения многих из встречающихся величин могут быть заранее известны. К таким величинам относятся: продолжительность земных суток в часах; процентное содержание компонентов выбранного торта; количество членов семьи. Значение других величин можно непосредственно найти из опыта или с помощью вычислений, получив предварительные данные с помощью измерений или пересчета, т. е. также из опыта.

В результате повторения некоторых опытов можно всегда получать одно и то же значение определенной величины, а в результате других значение величины изменяется, причем результат каждого отдельного опыта невозможно предугадать заранее.

Например, позвонив в справочное бюро (что является опытом), можно узнать стоимость авиабилета на выбранный рейс. В этом случае сообщенная конкретная стоимость билета является значением интересующей нас величины. Это значение (стоимость билета) неизменно, сколько бы раз мы ни звонили в справочное бюро. Если узнавать количество билетов, имеющихся на данный момент в кассе на конкретный рейс, то каждый раз в общем случае будут получены различные ответы, причем неизвестно заранее — какие. В данном опыте (звонок в справочное бюро) значение величины (количество билетов) меняется случайным образом от опыта к опыту. Величины, которые могут принять в результате опыта любое из возможных значений, неизвестно заранее — какое, заслуживают особого внимания и являются предметом дальнейшего изучения.

Определение. *Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.*

При многократном проведении опыта (испытания) в неизменных условиях в общем случае будут получены различные значения случайной величины. Это обусловлено случайными обстоятельствами, которые практически невозможно предусмотреть.

Например, при разовом бросании игрального кубика может появиться одно из чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Какое конкретное число появится, предугадать невозможно, так как появление любого из указанных чисел зависит от многих причин, которые нельзя учесть. Если при первом бросании может появиться 3, то при втором бросании возможно появление 1 или 5, а может вновь появиться 3. Таким образом, при повторении опыта число выпавших очков меняется случайным образом.

Итак, количество выпавших очков при бросании игрального кубика — величина переменная, характер ее изменения зависит от многих случайных причин. Такая величина является случайной.

Приведем примеры случайных величин.

○ **Пример 5.1.** Число выпавших «гербов» при пятикратном бросании монеты. ●

○ **Пример 5.2.** Число бракованных изделий в случайно отобранной партии из 20 изделий. ●

○ **Пример 5.3.** Дальность полета артиллерийского снаряда. ●

○ **Пример 5.4.** Наружный диаметр трубы. ●

○ **Пример 5.5.** Число мальчиков, родившихся в течение суток в определенной стране. ●

В примерах 5.1, 5.2 и 5.5 случайная величина может принимать отдельные изолированные значения, которые можно заранее перечислить. Так, в примере 5.1 такими значениями являются 0, 1, 2, 3, 4, 5, в примере 5.2—0, 1, 2, 3, ..., 20, в примере 5.5—0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Подобные случайные величины называются *дискретными* (*прерывными*). Заметим, что значения трех указанных выше случайных величин отделены друг от друга промежутками, в которых нет других возможных значений соответствующих величин.

В примерах 5.3 и 5.4 возможные значения случайной величины не отделены друг от друга и заполняют некоторый интервал. В этом случае одно значение случайной величины нельзя отделить от другого промежутком, не содержащим возможного значения этой же случайной величины.

Предположим (см. пример 5.3), что расчетная дальность полета снаряда 7000 м. Пусть при первом выстреле снаряд пролетел 7020, а при втором — 7040 м. При последующих выстрелах снаряд может пролететь и 7030, и 6995 м. Другими словами, снаряд может попасть в любую точку некоторого промежутка и невозможно указать какие-либо два возможных значения дальности полета снаряда, между которыми не найдется хотя бы одного возможного значения рассматриваемой случайной величины. Такие случайные величины называются *непрерывными.*

Определение. *Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.*

Примерами дискретной случайной величины являются число учащихся, опрошенных на уроке; число солнечных дней в году.

Определение. *Непрерывной случайной величиной называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.*

Примерами непрерывной случайной величины служат: время безаварийной работы станка; расход горючего на единицу расстояния; количество осадков, выпавших в сутки.

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами конца латинского алфавита — X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими малыми буквами — x, y, z. Например, X — число шахматных партий, окончившихся ничейным результатом, из трех сыгранных. В этом случае величина X может принять следующие значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Введем теперь операции над случайными величинами. Пусть имеются две случайные величины X и Y, возможными значениями которых являются соответственно $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ и $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$.

Определение. *Суммой $X+Y$ случайных величин X и Y называется случайная величина Z, возможные значения которой есть* x_1+y_1, x_1+y_2, $x_1+y_3, ..., x_1+y_j, ..., x_2+y_1$, x_2+y_2, $x_2+y_3, ..., x_2+y_j, ..., x_i+y_1$, x_i+y_2, $x_i+y_3, ..., x_i+y_j, ...$ $... x_n+y_n$.

Это определение следует понимать так: в результате опыта, в котором случайная величина X может принять то или иное значение, было получено число x_i (конкретное значение величины X), а в результате опыта, в котором уже случайная величина Y может принять то или иное значение, было получено число y_j (конкретное значение величины Y), после чего полученные числа складываются. Число x_i+y_j и является одним из возможных значений случайной величины $Z=X+Y$.

Определение. *Произведением XY случайных величин X и Y называется случайная величина Z, возможные значения которой есть* x_1y_1, x_1y_2, $x_1y_3, ..., x_2y_1$, x_2y_2, $x_2y_3, ... x_iy_j, ...,$ x_ny_m.

Определение. *Произведением CX* случайной величины *X на постоянную C называется такая случайная величина Z, возможные значения которой есть* Cx_1, Cx_2, $Cx_3, ..., Cx_i, ..., Cx_n$.

Аналогично определяются разность $X-Y$ и частное X/Y двух случайных величин.

○ **Пример 5.6.** Пусть случайная величина X может принять следующие три значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а случайная величина Y — значения $y_1=4$, $y_2=7$, $y_3=11$. Тогда возможные значения случайной величины $Z=X+Y$ таковы: $z_1=5$, $z_2=8$, $z_3=12$, $z_4=6$, $z_5=9$, $z_6=13$, $z_7=7$, $z_8=10$, $z_9=14$, а возможные значения случайной величины $Z=XY$ — следующие: $z_1=4$, $z_2=7$, $z_3=11$, $z_4=8$, $z_5=14$, $z_6=22$, $z_7=12$, $z_8=21$, $z_9=33$. Для величины $Z=5X$ возможными значениями являются $z_1=5$, $z_2=10$, $z_3=15$. ●

○ **Пример 5.7.** Пусть случайная величина X — число выпавших очков при бросании одного игрального кубика, а случайная величина Y — число выпавших очков при бросании второго игрального кубика. Рассмотрим случайную величину $Z=X+Y$ и обозначим $x_i+y_j=z_{ij}$, $i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Нетрудно заметить, что $z_{26}=z_{35}=z_{44}=z_{53}=z_{62}=8$. ●

Понятие суммы и произведения случайных величин можно по аналогии распространить на любое конечное число случайных величин.

§ 5.2. Ряд распределения случайной величины

Появление тех или иных значений случайной величины можно рассматривать как события, а различным событиям в общем случае, как известно из рассмотренного выше, соответствуют различные вероятности. Поэтому возможные значения случайной величины отличаются между собой с вероятностной точки зрения.

Так, например, при бросании двух игральных кубиков (см. пример 5.7) такие значения случайной величины $Z=X+Y$, как $z=2$ и $z=8$, находятся в «неодинаковых условиях». Значение $z=2$ может появиться только в одном случае, когда появятся значения $x_1=1$ и $y_1=1$, а значение $z=8$ может появиться в пяти случаях. Отсюда следует, что вероятность появления $z=2$ меньше, чем вероятность появления $z=8$.

Таким образом, перечисление всех возможных значений случайной величины не дает достаточно полного представления о ней. Кроме того, необходимо знать, как часто могут появляться те или иные ее значения в результате испытаний, проводящихся в одинаковых условиях, т. е. следует знать вероятности их появления.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с возможными значениями $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. В результате опыта случайная величина примет одно и только одно из этих значений. Другими словами, произойдет одно из несовместных событий, образующих полную группу: $X=x_1$, $X=x_2$, $X=x_3, ..., X=x_n$. Обозначим вероятность этих событий буквами p с соответствующими индексами: $P(X=x_1)=p_1$, $P(X=x_2)=p_2$, $P(X=x_3)=p_3, ..., P(X=x_n)=p_n$. Так как указанные события образуют полную группу, то сумма вероятностей появления возможных значений случайной величины равна 1, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i=1.$$

Если же множество значений случайной величины образует бесконечное, но счетное множество, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится и его сумма равна 1.

Таким образом, суммарная вероятность, равная 1, распределена между всеми значениями случайной величины.

Определив все возможные значения случайной величины X и правило, по которому каждому событию $X=x_i$, $i=1, 2, 3, ..., n$, ставится в соответствие вероятность, т. е. правило распределения вероятностей между значениями случайной величины, можно получить полное представление о случайной величине.

Определение. *Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.*

Про случайную величину говорят, что она подчиняется данному закону распределения.

Закон распределения случайной величины можно задать так же, как в математическом анализе функцию одного аргумента, используя табличный, графический или аналитический способ задания. Рассмотрим первый из них.

При табличном способе задания закона распределения первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания), а вторая — соответствующие вероятности (см. табл. 5.1).

Таблица 5.1

X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_i	...	p_n

Эта таблица называется *рядом распределения*.

Задача 5.1. В партии из восьми деталей пять стандартных. Наудачу взяты четыре детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

△ Пусть X — число стандартных деталей среди четырех отобранных. Оно может принять следующие четыре значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. Для определения вероятности появления конкретного числа стандартных деталей воспользуемся формулой

$$P(X=k)=\frac{C_m^k C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l},$$

где n — число деталей в партии, l — число отобранных деталей, m — число стандартных деталей, k — число стандартных деталей среди отобранных. Далее имеем

$$P(X=1)=\frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4}=1/14,$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4}=6/14,$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4}=6/14,$$

$$P(X=4)=\frac{C_5^4 C_3^0}{C_8^4}=1/14.$$

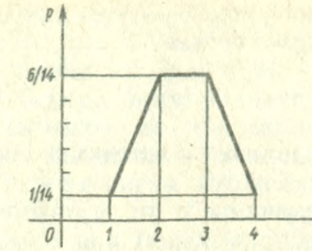

Рис. 5.1

Проверим вычисления. Складывая полученные вероятности, получаем $1/14+6/14+6/14+1/14=1$. Искомый ряд распределения имеет вид

X	1	2	3	4
P	1/14	6/14	6/14	1/14

▲

Ряд распределения можно задать графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, а по оси ординат — вероятности этих значений. Соединив точки $(x_i;\ y_i)$ последовательно отрезками прямой линии, получим ломаную, которая называется *многоугольником распределения вероятностей.*

Воспользовавшись результатами задачи 5.1, построим многоугольник распределения (рис. 5.1). Многоугольник распределения, как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину и является одним из способов (графическим) задания закона распределения.

Заметим, что сумма ординат многоугольника равна единице. Это свойство многоугольника распределения является определяющим. Если в прямоугольной системе координат дана некоторая ломаная, удовлетворяющая определению функции и обладающая указанным выше свойством, то такая ломаная, очевидно, задает закон распределения некоторой случайной величины.

§ 5.3. Функция распределения вероятностей

В предыдущем параграфе были рассмотрены два способа задания распределения дискретной случайной величины. Напомним, что дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и соответствующих вероятностей.

При задании закона распределения непрерывной случайной величины такой способ уже неприемлем хотя бы потому, что множество ее возможных значений бесконечно и сплошь заполняет некоторый промежуток. В этом случае не представляется возможности перечислить все значения случайной величины и их вероятности в виде таблицы (построить ряд распределения) или отметить их в системе координат (построить многоугольник распределения).

Кроме того, как будет показано в дальнейшем, каждое отдельное значение непрерывной случайной величины обладает нулевой вероятностью. Это означает, что все значения непрерывной случайной величины, образующие бесконечное множество, имеют одинаковую и равную нулю вероятность.

Однако, несмотря на равенство нулю вероятностей отдельных значений непрерывной случайной величины, нахождение ее возможных значений в различных интервалах обладает различными и отличными от нуля вероятностями. Таким образом, для непрерывной случайной величины, так же как и для дискретной, можно определить закон распределения, но несколько в ином виде, чем для дискретной.

Для характеристики поведения непрерывной случайной величины целесообразно использовать не вероятность события $X=x$, а вероятность события $X<x$, где x — некоторое действительное число. Другими словами, представляет интерес вероятность события, состоящего в том, что в результате опыта случайная величина X приняла значение, которое оказалось меньше некоторого фиксированного x. Если теперь x изменяется произвольно, то вероятность выполнения неравенства $X<x$ в общем случае будет изменяться. Следовательно, вероятность $P(X<x)$ является функцией аргумента x. Обозначим эту функцию $F(x)$.

Определение. *Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, задающая вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x, т. е.*

$$F(x)=P(X<x). \tag{5.1}$$

Иногда функцию $F(x)$ называют *интегральной функцией распределения.*

Функция распределения допускает простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим случайную величину X как случайную точку X на оси Ox (рис. 5.2), которая в результате опыта может занять то или иное положение. Пусть на оси выбрана конкретная точка x; тогда в результате опыта случайная точка X может оказаться левее или правее этой точки. Очевидно, вероятность того, что случайная точка X окажется левее точки x, будет зависеть от положения точки x, т. е. являться функцией аргумента x.

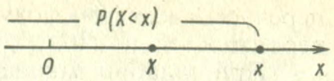

Рис. 5.2

Для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i), \tag{5.2}$$

где неравенство $x_i<x$ под знаком суммы означает, что суммирование касается всех тех значений x_i, величина которых меньше x. Поясним эту формулу исходя из определения функции $F(x)$. Предположим, что аргумент x принял какое-то определенное значение, но такое, что выполняется неравенство $x_i<x\leqslant x_{i+1}$. Тогда левее числа x на числовой оси окажутся только те значения случайной величины, которые имеют индекс 1, 2, 3, ..., i. Поэтому неравенство $X<x$ выполняется, если величина X примет значение x_k, где $k=1, 2, 3, \ldots, i$. Таким образом, событие $X<x$ наступит, если наступит любое, неважно какое, из событий $X=x_1$, $X=x_2$, $X=x_3$, ..., $X=x_i$. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей имеем

$$P(X<x)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+$$
$$+P(X=x_3)+\ldots+P(X=x_i)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i).$$

Прежде чем приступить к дальнейшему изучению функции $F(x)$, отметим большую значимость и глубокий смысл равенства (5.1). В левой части этого равенства находится «обыкновенная» функция действительного аргумента, а в правой — переменная вероятность. Эта формула связывает один из важных разделов математики, изучающий функции действительного аргумента, с теорией вероятностей, где изучаются, в частности, случайные события, которые могут произойти, а могут и не произойти в результате опыта.

В отличие от случайного события, наступление которого можно только предвидеть, так же как и появление определенного значения случайной величины, значение функции действительного аргумента всегда можно однозначно определить.

Формула (5.1) является своеобразным «мостом» между математическим анализом и теорией вероятностей, между функциями действительного переменного и случайными величинами. Эта формула дает возможность при исследовании в теории вероятностей использовать аппарат математического анализа, без которого было бы трудно получить хорошие результаты.

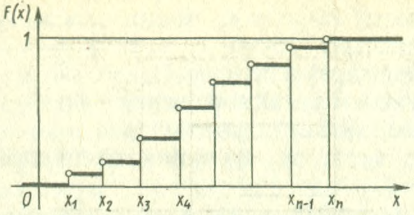

Рис. 5.3

Построим теперь функцию распределения случайной величины X, ряд распределения которой представлен в табл. 5.1:

при $x \leqslant x_1$ $\quad F(x)=P(X<x_1)=0;$

при $x_1<x\leqslant x_2$ $\quad F(x)=P(X<x_2)=P(X=x_1)=p_1;$

при $x_2<x\leqslant x_3$ $\quad F(x)=P(X<x_3)=P(X=x_1)+P(X=x_2)=$ $=p_1+p_2;$

при $x_3<x\leqslant x_4$ $\quad F(x)=P(X<x_4)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+$ $+P(X=x_3)=p_1+p_2+p_3;$

....

при $x_{n-1}<x\leqslant x_n$ $\quad F(x)=P(X<x_n)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots$ $+P(X=x_3)+\ldots+P(X=X_{n-1})=p_1+p_2+$ $+p_3+\ldots+p_{n-1};$

при $x>x_n$ $\quad F(x)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+P(X=x_3)+\ldots$ $\ldots+P(X=x_n)=p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1.$

График построенной функции изображен на рис. 5.3. Для дискретной случайной величины график функции распределения представляет собой разрывную ступенчатую линию. Когда переменная x проходит через какое-нибудь из возможных значений случайной величины, значение функции распределения меняется скачкообразно, т. е. функция имеет скачок в тех точках, в которых случайная величина принимает конкретное значение согласно ряду распределения, причем величина скачка равна вероятности этого значения. Сумма величин всех скачков функции распределения равна 1. В интервалах между значениями случайной величины функция $F(x)$ постоянна. Отметим, что по функции распределения дискретной случайной величины можно легко восстановить ее ряд распределения.

Задача 5.2. Используя результаты решения задачи 5.1, построить функцию распределения случайной величины X и ее график.

△ Имеем:

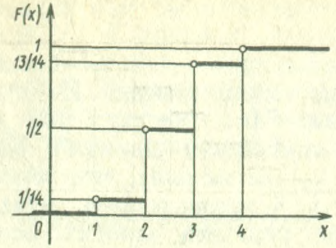

Рис. 5.4

при $x\leqslant 1$ $\quad F(x)=P(X<1)=0;$

при $1<x\leqslant 2$ $\quad F(x)=P(X<2)=1/14;$

при $2<x\leqslant 3$ $\quad F(x)=P(X<3)=1/14+6/14=1/2;$

при $3<x\leqslant 4$ $\quad F(x)=P(X<4)=1/14+6/14+6/14=13/14;$

при $x>4$ $\quad F(x)=1/14+6/14+6/14+1/14=1.$

Полученные результаты объединим в таблицу:

$F(x)$	0	1/14	1/2	13/14	1
Интервал	$]-\infty;\,1]$	$]1;\,2]$	$]2;\,3]$	$]3;\,4]$	$]4;\,\infty[$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 5.4. ▲

Из рис. 5.4 видно, что $F(x)$ имеет четыре скачка по числу принимаемых случайной величиной X значений. По мере возрастания числа возможных значений случайной величины с одновременным уменьшением величины интервалов между ними число скачков становится больше, а сами скачки — меньше, вследствие чего ступенчатая кривая становится более плавной (рис. 5.5). В этом случае дискретная случайная величина постепенно приближается к непрерывной, а ее функция распределения — к непрерывной функции (рис. 5.6).

Рассмотрим свойства функции распределения.

1^0. *Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, то $0\leqslant F(x)\leqslant 1$ для любого x.*

□ Утверждение следует из формулы (5.1), так как веро-

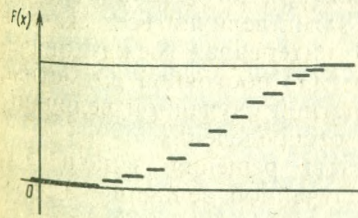

Рис. 5.5

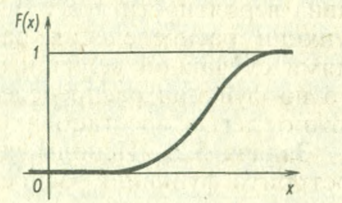

Рис. 5.6

ятность любого события есть неотрицательное число, не превышающее 1. ■

Прежде чем сформулировать и доказать второе свойство, приведем следующие соображения. Из геометрической интерпретации функции $F(x)$ следует, что для произвольных $x_1 < x_2$ вероятность попадания значений случайной величины X в интервал $]-\infty; x_2[$ не меньше, чем вероятность попадания в интервал $]-\infty; x_1[$. Следовательно, функция $F(x)$ — неубывающая. Далее, при решении многих вероятностных задач возникает необходимость нахождения вероятности попадания значений случайной величины в заданный интервал. Следующее свойство, которое, в частности, подтверждает мысль о неубывании функции $F(x)$, позволяет определить значение указанной вероятности.

2^0. *Функция распределения $F(x)$ случайной величины X является неубывающей функцией, и для любых $\alpha < \beta$ выполняется равенство*

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (5.3)$$

□ Докажем предварительно равенство (5.3), для чего рассмотрим следующие события: событие A, состоящее в том, что $X < \alpha$; событие B, состоящее в том, что $X < \beta$; событие C, состоящее в том, что $\alpha \leqslant x < \beta$. Можно записать: $P(A) = P(X < \alpha) = F(\alpha)$; $P(B) = P(X < \beta) = F(\beta)$; $P(C) = P(\alpha \leqslant X < \beta)$. Нетрудно заметить, что событие B представляет собой сумму двух несовместных событий A и C. Геометрическая иллюстрация этого факта приведена на рис. 5.7. По теореме сложения вероятностей,

$$P(B) = P(A + C) = P(A) + P(C)$$

или

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \leqslant X < \beta),$$

откуда и следует равенство (5.3). Так как вероятность любого события число неотрицательное, то, отбрасывая в последнем равенстве $P(\alpha \leqslant X < \beta)$, получаем $F(\beta) \geqslant F(\alpha)$. ■

Вернемся к геометрической интерпретации функции $F(x)$ (см. рис. 5.2). Пусть точка x неограниченно перемещается влево по оси, т. е. стремится к «минус бесконечности». Тогда попадание случайной точки X левее x в пределе становится невозможным событием. Другими словами, случайная точка X не может оказаться левее «минус бесконечности». Поэтому естественно предположить, что $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

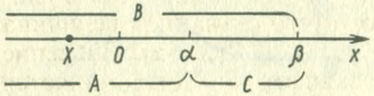

Рис. 5.7

При неограниченном перемещении точки x вправо, т. е. при стремлении ее к «плюс бесконечности», попадание точки X левее x становится в пределе достоверным событием. Другими словами, случайная точка X никогда не может оказаться правее «плюс бесконечности». Куда бы эта точка ни попала, она всегда будет находиться левее «плюс бесконечности». Поэтому естественно предположить, что $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

3^0. *Если $F(x)$ — функция распределения, то*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad и \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

□ Так как $F(x)$ — монотонная функция (см. свойство 2^0) и ограниченная (см. свойство 1^0), то, по известной из математического анализа теореме о монотонной и ограниченной функции, пределы $\lim\limits_{x \to \pm\infty} F(x)$ существуют. В силу предполагаемой непрерывности $F(x)$ можно записать

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X < x) = P(X < -\infty).$$

Так как событие $X < -\infty$ является невозможным, то $P(X < -\infty) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Рассуждая аналогично, получим

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} P(X < x) = P(X < \infty).$$

Событие $X < \infty$ является достоверным. Тогда

$$P(X < \infty) = 1 \quad и \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1. \ ■$$

4^0. *Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.*

□ Воспользуемся равенством (5.3) и устремим β к α. В результате получим

$$\lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha \leqslant X < \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)].$$

В левой части последнего равенства в пределе вместо вероятности попадания значения случайной величины в интервал $(\alpha; \beta)$ получим вероятность того, что случайная величина приняла отдельно взятое значение α, т. е. $P(X = \alpha)$. Значение предела в правой части равенства зависит от того, является ли функция $F(x)$ непрерывной в точке α или имеет в ней разрыв. В последнем случае указанный предел равен величине скачка функции $F(x)$ в точке α. Так как предполагается, что $F(x)$ всюду непрерывна, то

$$\lim_{\beta\to\alpha}[F(\beta)-F(\alpha)]=F(\alpha)-F(\alpha)=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\beta\to\alpha}P(\alpha\leqslant X<\beta)=\lim_{\beta\to\alpha}[F(\beta)-F(\alpha)]=P(X=\alpha)=0. \blacksquare$$

Поясним доказанное свойство. Ранее событие полагалось невозможным, если его вероятность равна нулю. Однако из свойства 4^0 функции $F(x)$ следует, что нулевой вероятностью могут обладать и возможные события, так как событие, заключающееся в том, что случайная величина приняла конкретное значение, является возможным. Другими словами, появление любого отдельного значения случайной величины является возможным событием, несмотря на то что вероятность его появления равна нулю. Такие события (возможные, но с нулевой вероятностью) появляются при рассмотрении опытов, не сводящихся к схеме случаев, когда применение классического определения вероятности ограничено. Подобные ситуации выглядят парадоксально. Однако на самом деле ничего парадоксального нет в представлении о том, что определенное материальное тело, имеющее массу, состоит из материальных точек, каждая из которых не имеет массы, хотя сколь угодно малый объем этого тела имеет определенную, пусть очень малую, массу. Рассматриваемая ситуация аналогична приведенному примеру.

При непрерывном распределении вероятностей, т. е. когда функция распределения непрерывна, вероятность попадания значения непрерывной случайной величины на сколь угодно малый участок отлична от нуля, тогда как вероятность попадания в строго отдельную точку равна нулю. Очевидно, в данном случае нет смысла рассматривать вероятность принятия отдельного значения случайной величиной, но имеет смысл рассматривать вероятность попадания ее значения в интервал, пусть даже сколь угодно малый. Сказанное согласуется с практикой. Так, например, при изготовлении детали рабочий следит за тем, чтобы определенный размер не вышел за пределы допуска, зная, что вряд ли сможет точно выдержать размер, хотя последнее не исключается. Исследователя в данный момент будет интересовать вероятность попадания размера в определенные границы, а не вероятность совпадения размера изготовленной детали с требуемым по чертежу размером.

Теперь, воспользовавшись свойством 4^0, докажем, что для непрерывной случайной величины выполняются следующие равенства:

$$P(\alpha\leqslant X<\beta)=P(\alpha<X<\beta)=P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=P(\alpha<x\leqslant\beta).$$

Для этого достаточно доказать одно из них (остальные доказываются аналогично). Событие $\alpha\leqslant X<\beta$ представляет собой сумму двух несовместных событий $X=\alpha$ и $\alpha<X<\beta$. По теореме сложения имеем

$$P(\alpha\leqslant X<\beta)=P(X=\alpha)+P(\alpha<X<\beta).$$

Но согласно свойству 4^0, $P(X=\alpha)=0$; тогда $P(\alpha\leqslant X<\beta)=$ $=P(\alpha<X<\beta)$ и формула (5.3) принимает вид

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha). \tag{5.4}$$

Эту формулу мы и будем использовать в дальнейшем.

Задача 5.3. Функция распределения случайной величины X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-\pi/4,\\ a\sin(x-\pi/4)+1/2 \text{ при } -\pi/4\leqslant x\leqslant 3\pi/4,\\ 1 \text{ при } x\geqslant 3\pi/4.\end{cases}$$

Найти коэффициент a; вероятность попадания значения случайной величины X в результате опыта в интервал $(\pi/4;\ 3\pi/4)$; построить график функции $F(x)$.

$\triangle$ При $x=3\pi/4$ функция $F(x)$ равна 1, т. е.

$$a\sin(x-\pi/4)+1/2=1$$

или

$$a\sin(\pi/2)+1/2=1,$$

откуда $a=1/2$.

Подставляя $\alpha=\pi/4$ и $\beta=3\pi/4$ в равенство (5.4), получаем

$$P(\pi/4<X<3\pi/4)=F(3\pi/4)-F(\pi/4)=(1/2)\sin(\pi/2)+1/2-$$
$$-(1/2)\sin 0-1/2=1/2.$$

График функции $y=\frac{1}{2}\sin(x-\pi/4)+1/2$ отличается от графика функции $y=\sin x$ тем, что он «сжат» по оси Oy в два раза, сдвинут вправо на $\pi/4$, поднят вверх на $1/2$. Воспользовавшись этим замечанием, строим график $F(x)$ (рис. 5.8). $\blacktriangle$

§ 5.4. Плотность распределения вероятностей

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины дает полную вероятностную характеристику ее поведения. Однако задание непрерывной случайной величины

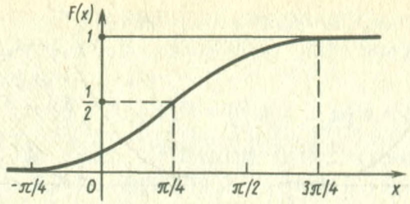

Рис. 5.8

с помощью функции распределения не является единственным. Ее можно задать с помощью другой функции, которая называется *дифференциальной функцией распределения* или *плотностью распределения вероятностей.* В некотором смысле эта функция «более удобная», чем интегральная функция $F(x)$. Используя функцию $F(x)$, трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси. Решить эту задачу позволяет плотность распределения вероятностей.

Пусть имеем непрерывную случайную величину X с интегральной функцией распределения $F(x)$, относительно которой будем предполагать, что она непрерывна и дифференцируема в исследуемом интервале. Рассмотрим вероятность попадания значения случайной величины в элементарный участок $(x;\ x+\Delta x)$ длины Δx. Эту вероятность несложно вычислить, используя свойство 2^0 функции $F(x)$. Согласно формуле (5.4), искомая вероятность

$$P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x),$$

т. е. равна приращению функции $F(x)$ на этом участке.

Определим теперь вероятность, которая приходится на единицу длины рассматриваемого участка, для чего разделим обе части последнего равенства на длину участка Δx. Имеем

$$\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Перейдем в полученном равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$. В результате получим производную функции $F(x)$, которая существует, поскольку $F(x)$ предполагалась дифференцируемой:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).$$

Обозначим

$$F'(x)=f(x). \tag{5.5}$$

Определение. *Дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения вероятностей называется первая производная интегральной функции распределения $F(x)$.*

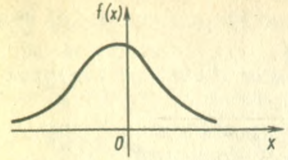

Рис. 5.9

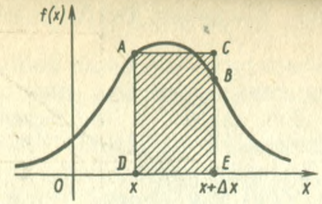

Рис. 5.10

Иногда дифференциальную функцию распределения $f(x)$ называют *плотностью* или *функцией плотности распределения вероятности.*

Заметим, что для характеристики распределения вероятностей значений дискретной случайной величины дифференциальная функция распределения неприменима хотя бы потому, что для существования $f(x)$ требуется непрерывность и дифференцируемость функции $F(x)$, а для дискретной случайной величины эти требования не выполняются.

График дифференциальной функции распределения $f(x)$ называется *кривой распределения* (рис. 5.9). Из математического анализа известно, что приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ приближенно равно дифференциалу функции dy. Запишем это приближенное равенство для функции $F(x)$. Имеем

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx dF(x)$$

или

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx F'(x)\,dx.$$

Так как $F'(x)=f(x)$ и $dx=\Delta x$, то

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx f(x)\,\Delta x.$$

Последнее равенство означает, что вероятность попадания значения случайной величины X в интервал $]x;\ x+\Delta x[$ приближенно равна произведению плотности вероятности в точке x на длину интервала Δx. С геометрической точки зрения это равенство можно истолковать так: вероятность попадания значения случайной величины в интервал $]x;\ x+\Delta x[$ приближенно равна площади прямоугольника с основанием Δx и высотой $f(x)$ (рис. 5.10). Из рис. 5.10 видно, что площадь заштрихованного прямоугольника, равная $f(x)\,\Delta x$, только приближенно равна площади криволинейной трапеции $DABE$. Как будет установлено ниже, площадь указанной криволинейной трапеции точно соответствует вероятности попадания значения случайной величины на элементарный участок $]x;\ x+\Delta x[$.

Величину $f(x)\,dx = f(x)\,\Delta x$ называют *элементом вероятности.*

Рассмотрим основные свойства дифференциальной функции распределения (функции плотности).

1°. *Для любых x дифференциальная функция распределения $f(x)$ неотрицательна, т. е.* $f(x) \geqslant 0$.

□ Доказательство непосредственно следует из определения функции $f(x)$ как первой производной функции $F(x)$, которая, в свою очередь, является неубывающей. Из математического анализа известно, что производная неубывающей функции неотрицательна, т. е.

$$F'(x) = f(x) \geqslant 0. \ ■$$

2°. *Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство*

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \qquad (5.6)$$

□ Так как функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ $(F'(x) = f(x))$, то из формулы (5.4) и формулы Ньютона—Лейбница следует, что

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \ ■$$

Формула (5.6) имеет простой геометрический смысл: вероятность $P(\alpha < X < \beta)$ численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = \alpha$, $x = \beta$ (рис. 5.11).

Вернемся к рис. 5.10. Площадь криволинейной трапеции S_{DABE} на основании свойства 2° функции $f(x)$ равна

$$S_{DABE} = \int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx = F(x+\Delta x) - F(x) = P(x < X < x + \Delta x) \approx$$
$$\approx f(x)\,\Delta x.$$

3°. *Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \qquad (5.7)$$

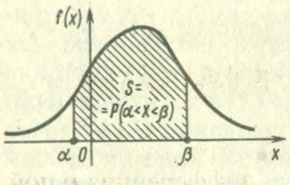

Рис. 5.11

□ Согласно определению несобственного интеграла по бесконечным пределам и свойству 3° функции $F(x)$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to \infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to \infty}} [F(\beta) - F(\alpha)] =$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} F(\beta) - \lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha) = 1 - 0 = 1. \ ■$$

Если интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ выражает вероятность попадания значения случайной величины в интервал $]\alpha, \beta[$, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ определяет вероятность такого попадания в интервал $]-\infty, \infty[$. С другой стороны, в результате опыта случайная величина обязательно примет какое-нибудь значение и это значение несомненно окажется в интервале $]-\infty, \infty[$, т. е. произойдет заведомо достоверное событие, вероятность которого равна единице.

Геометрически равенство (5.7) означает, что площадь, ограниченная осью Ox и кривой распределения, равна единице (рис. 5.12).

4°. *Для интегральной и дифференциальной функций распределения имеет место равенство*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (5.8)$$

□ Согласно определению несобственного интеграла и свойству 3° функции $F(x)$, имеем

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \lim_{\alpha \to -\infty} [F(x) - F(\alpha)] =$$
$$= F(x) - \lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha) = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x). \ ■$$

В заключение отметим, что если случайная величина принимает значения только в некотором интервале $]\alpha, \beta[$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 1.$$

Задача 5.4. Используя условие задачи 5.3, найти дифференциальную функцию распределения и построить ее график.

△ Согласно определению дифференциальной функции распределения как первой производной интегральной функции распределения, имеем

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = -\pi/4, \\ (1/2)\cos(x - \pi/4) \text{ при } -\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4, \\ 0 \text{ при } x > 3\pi/4. \end{cases}$$

Искомый график изображен на рис. 5.13. ▲

Задача 5.5. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

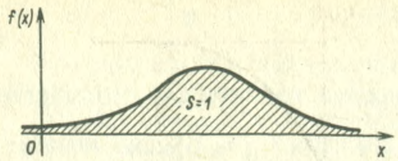

Рис. 5.12

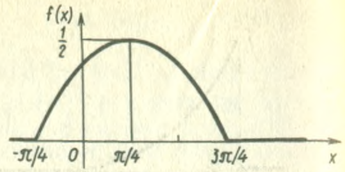

Рис. 5.13

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ (x-3)^2/9 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x>3. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

△ Воспользуемся формулой (5.8). Имеем: если $x<0$, то $f(x)=0$; следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0;$$

если $0\leqslant x\leqslant 3$, то $f(x)=(x-3)^2/9$; следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x}\frac{(t-3)^2}{9}dt=\frac{(t-3)^3}{27}\bigg|_0^x=\frac{(x-3)^3}{27}+1;$$

если $x>3$, то $f(x)=0$; следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{3}\frac{(t-3)^2}{9}dt+\int_{3}^{x} 0\,dt=1.$$

Таким образом, искомая функция $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ (x-3)^3/27+1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 1 \text{ при } x>3. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 5.14 и 5.15 соответственно. ▲

§ 5.5. Числовые характеристики случайной величины

Для решения многих практических задач совсем необязательно знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а достаточно указать отдельные числовые параметры, которые позволяют в удобной, компактной форме отразить существенные особенности случайной величины.

Эти характеристики случайной величины, являющиеся не функциями, а числами, называют *числовыми характеристиками*

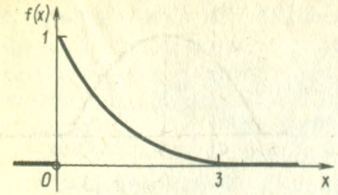

Рис. 5.14

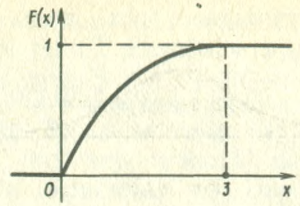

Рис. 5.15

случайной величины. Их назначение — в сжатой форме выразить наиболее важные черты распределения. К таким числовым характеристикам относятся математическое ожидание, дисперсия, моменты различных порядков и т. д. Рассмотрим некоторые наиболее важные числовые характеристики и изучим их свойства.

1. Математическое ожидание. Возможные значения случайной величины могут быть сосредоточены вокруг некоторого центра. Этот центр является некоторым средним значением случайной величины, вокруг которого группируются остальные ее значения. Для характеристики такой особенности распределения случайной величины служит математическое ожидание, которое иногда называют *центром распределения* или *средним значением* случайной величины.

Пусть имеется дискретная случайная величина X, принимающая значения $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ соответственно.

Определение. *Математическим ожиданием MX дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности появления этих значений, т. е.*

$$MX=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{5.9}$$

Если дискретная случайная величина принимает бесконечное счетное множество значений, то ее математическое ожидание выражается формулой

$$MX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Поясним формулу (5.9). Пусть проведено n испытаний, в которых случайная величина X приняла значения $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, причем значение x_1 появилось m_1 раз, значение x_2 появилось m_2 раз, ..., значение x_k появилось m_k раз. Очевидно, $m_1+m_2+m_3+...+m_k=n$. Найдем среднее арифметическое всех этих значений и обозначим его $\bar{X}$. Имеем

$$\bar{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3+\ldots+x_km_k}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k}$$

или

$$\bar{X}=\sum_{i=1}^{k} x_i\frac{m_i}{n}.$$

Заметим, что дробь m_i/n есть не что иное, как относительная частота появления значения x_i в n испытаниях, т. е. статистическая вероятность. Обозначим эту дробь $\hat{p}_i$. Учитывая, что $\hat{p}_i=m_i/n$, запишем теперь среднее арифметическое $\bar{X}$ в виде

$$\bar{X}=\sum_{i=1}^{k} x_i\hat{p}_i. \qquad (5.9')$$

Таким образом, формула (5.9) вполне объяснима, только следует помнить, что в этой формуле n — число всех возможных значений случайной величины; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — эти значения, а в формуле (5.9′) n — число испытаний или наблюдений над случайной величиной; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ — наблюдаемые значения случайной величины.

Задача 5.6. Дискретная случайная величина X задана следующим рядом распределения:

X	2	5	8	19
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти математическое ожидание этой случайной величины.

△ По формуле (5.9) имеем

$$MX=2\cdot0{,}2+5\cdot0{,}3+8\cdot0{,}4+19\cdot0{,}1=7. \ ▲$$

Задача 5.7. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если $P(A)=p$.

△ Пусть X — число появлений события A в одном испытании. Эта величина может принять только два значения: $x_1=1$ (событие наступило) с вероятностью p и $x_2=0$ (событие не наступило) с вероятностью $1-p$. Искомое математическое ожидание

$$MX=1\cdot p+0(1-p)=p. \ ▲$$

Формулу (5.9) нельзя применять для непрерывной случайной величины. При введении понятия математического ожидания для этого случая воспользуемся понятием элемента вероятности $f(x)\Delta x$.

Предположим, что все возможные значения случайной величины X принадлежат отрезку $[a, b]$. Разобьем произвольным образом этот отрезок точками $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n=b$ на n частичных отрезков. В каждом таком частичном отрезке, длина которого Δx_i, произвольно возьмем точку h_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$. Из § 5.4 известно, что вероятность попадания значения непрерывной случайной величины на отрезок Δx приближенно равна $f(x)\Delta x$ (элемент вероятности) и поэтому приближенно будем считать, что случайная величина X может принять n значений h_i на отрезке $[a, b]$ с вероятностями $f(h_i)\Delta x_i$. Теперь можно воспользоваться формулой (5.9), задающей математическое ожидание для дискретной случайной величины, заменив x_i на h_i, а p_i на $f(h_i)\Delta x_i$. В результате будем иметь

$$MX\approx\sum_{i=1}^{n} h_i f(h_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу в правой части равенства при $n\to\infty$ и стремлении к нулю длины наибольшего из частичных отрезков, воспользовавшись понятием определенного интеграла, получаем

$$\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Определение. *Математическим ожиданием MX непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл $\int_a^b xf(x)\,dx$, т. е.*

$$MX=\int_a^b xf(x)\,dx. \qquad (5.10)$$

Если возможные значения случайной величины распределены по всей оси Ox, то

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx. \qquad (5.11)$$

Здесь предполагается, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ сходится абсолютно, т. е. существует.

Задача 5.8. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

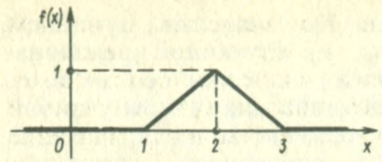

Рис. 5.16

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<1, \\ x-1 \text{ при } 1\leqslant x<2, \\ -x+3 \text{ при } 2\leqslant x<3, \\ 0 \text{ при } x\geqslant 3. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание этой случайной величины.

△ Так как все возможные значения случайной величины расположены на отрезке [1, 3], то воспользуемся формулой (5.10). Имеем

$$MX=\int_1^3 xf(x)\,dx=\int_1^2 x(x-1)\,dx+\int_2^3 x(3-x)\,dx=$$
$$=(x^3/3-x^2/2)|_1^2+(3x^2/2-x^3/3)|_2^3=2. \ ▲$$

Появление такого результата следовало ожидать, так как график функции $f(x)$ (рис. 5.16) симметричен относительно прямой $x=2$, т. е. значение случайной величины $X=2$ является ее средним значением.

Рассмотрим основные свойства математического ожидания, предварительно введя понятие независимых случайных величин.

Определение. *Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения вероятностей одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются зависимыми.*

Определение. *Несколько случайных величин называются взаимно независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие значения приняли какие-либо другие из оставшихся величин.*

В дальнейшем слово «взаимно» будем опускать.

1^0. *Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин X и Y равно алгебраической сумме их математических ожиданий, т. е.*

$$M(X\pm Y)=M(X)\pm MY. \qquad (5.12)$$

□ Пусть X и Y — дискретные случайные величины с математическими ожиданиями MX и MY соответственно, имеющие следующие ряды распределения:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_i	...	p_n

Y	y_1	y_2	y_3	...	y_j	...	y_m
P	q_1	q_2	q_3	...	q_j	...	q_m

При этом $\sum_{i=1}^n p_i=1$, $\sum_{j=1}^m q_j=1$.

Пусть случайные величины X и Y независимы и найдем вероятность появления значения $x_i\pm y_j$ случайной величины $Z=X\pm Y$. Для появления указанного значения необходимо, чтобы с вероятностью p_i появилось значение x_i случайной величины X и с вероятностью q_j появилось значение y_j случайной величины Y.

Таким образом, для появления значения $x_i\pm y_j$ необходимо одновременное наступление двух событий $X=x_i$ и $Y=y_j$. На основании теоремы умножения для независимых событий заключаем, что вероятность появления значения $x_i\pm y_j$ равна p_iq_j, т. е.

$$P(Z=x_i\pm y_j)=p_iq_j.$$

Ряд распределения случайной величины Z в этом случае имеет вид

$X\pm Y$	$x_1\pm y_1$	$x_2\pm y_1$	$x_1\pm y_2$	...	$x_i\pm y_j$	...	$x_n\pm y_m$
P	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	...	p_iq_j	...	p_nq_m

Таким образом, математическое ожидание случайной величины $X\pm Y$ равно сумме произведений возможных значений этой величины на соответствующие вероятности:

$$M(X\pm Y)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m (x_i\pm y_j)p_iq_j=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x_ip_iq_j\pm\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m y_jp_iq_j=$$
$$=\sum_{i=1}^n x_ip_i\sum_{j=1}^m q_j\pm\sum_{j=1}^m y_jq_j\sum_{i=1}^n p_i=\sum_{i=1}^n x_ip_i\pm\sum_{j=1}^m y_jq_j=MX\pm MY. \ ■$$

Можно показать, что доказанное свойство верно и для зависимых случайных величин. Методом математической индукции рассмотренное свойство легко распространяется на произвольное конечное число слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n MX_i.$$

2^0. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий, т. е.*

$$M(XY)=MX\cdot MY. \qquad (5.13)$$

□ Пусть законы распределения дискретных случайных величин X и Y заданы рядами распределения, приведенными при доказательстве свойства 1^0. Очевидно, что ряд распределения случайной величины $Z=XY$ для независимых случайных величин имеет вид

XY	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	...	x_iy_j	...	x_ny_m
P	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	...	p_iq_j	...	p_nq_m

Согласно определению математического ожидания для дискретной случайной величины, имеем

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_jp_iq_j=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i\sum_{j=1}^{m} y_jq_j=MX\cdot MY. \blacksquare$$

Это свойство легко распространить на любое конечное число независимых случайных величин:

$$M\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} MX_i.$$

Следует отметить, что оба свойства доказаны здесь только для дискретных случайных величин. Однако они справедливы и для непрерывных случайных величин.

3^0. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, т. е.*

$$MC=C. \tag{5.14}$$

□ Постоянную C можно рассматривать как дискретную величину, которая с вероятностью $p=1$ принимает единственное значение C. Тогда по определению математического ожидания имеем

$$MC=C\cdot 1=C. \blacksquare$$

4^0. *Постоянный множитель случайной величины может быть вынесен за знак математического ожидания, т. е.*

$$M(CX)=CMX. \blacksquare \tag{5.15}$$

□ Рассматривая произведение CX как произведение двух независимых случайных величин и воспользовавшись свойствами 2^0 и 3^0 математического ожидания, получаем

$$M(CX)=MC\cdot MX=CMX. \blacksquare$$

5^0. *Математическое ожидание отклонения $X-MX$ случайной величины X от ее математического ожидания MX равно нулю, т. е.*

$$M(X-MX)=0. \tag{5.16}$$

□ Используя свойства 1^0 и 3^0 и учитывая, что математическое ожидание — величина постоянная, получаем

$$M(X-MX)=MX-M(MX)=MX-MX=0. \blacksquare$$

Поясним понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Математическое ожидание MX случайной величины X, как известно, вполне определенная для данной случайной величины постоянная. В результате опыта величина X принимает одно из ее возможных значений x. Разность $x-MX$ показывает, насколько отклонилось это значение случайной величины в данном опыте от MX. Очевидно, что разность $x-MX$ является случайной величиной. Эту величину будем обозначать $X-MX$ и называть *отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания MX.

2. Дисперсия. На практике встречаются случайные величины, имеющие одинаковые математические ожидания, однако принимающие резко отличающиеся значения. У одних из этих величин отклонения значений от математического ожидания небольшие, а у других, наоборот, значительны, т. е. для одних рассеивание значений случайной величины вокруг математического ожидания мало, а для других оно велико.

Таким образом, математическое ожидание характеризует поведение случайной величины далеко не полностью. Приведем следующий пример.

Пример 5.8. Пусть дискретные случайные величины X и Y заданы следующими рядами распределения:

X	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Y	-1	3	8	11
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Найдем математическое ожидание этих величин. Имеем

$$MX=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}4=4;$$
$$MY=-1\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}5+8\cdot 0{,}2+11\cdot 0{,}1=4.$$

Отложим значения этих величин на числовых осях с одинаковым масштабом (рис. 5.17, *а*, *б*). Рассматриваемые случайные величины имеют одинаковые математические ожидания, равные 4. Однако рассеивание значений случайной величины X вокруг математического ожидания значительно меньше, чем у величины Y. ●

Приведенные рассуждения и пример свидетельствуют о целесообразности введения такой характеристики случайной величины, которая оценивала бы меру рассеивания значений

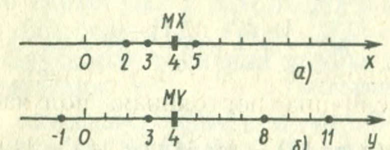

Рис. 5.17

случайной величины вокруг ее математического ожидания, тем более что на практике часто приходится оценивать такое рассеивание. Например, артиллеристам необходимо знать, как кучно лягут снаряды вблизи цели, по которой ведется стрельба.

Ранее уже отмечалось, что случайная величина $X-MX$ характеризует отклонение значений случайной величины от ее математического ожидания. Однако брать среднее значение (математическое ожидание) этой величины в качестве характеристики рассеивания не имеет смысла, так как оно равно нулю (свойство 5^0 математического ожидания). Последнее объясняется тем, что возможные значения $X-MX$ могут иметь как положительные, так и отрицательные знаки.

Избежать изменения знаков отклонений x_i-MX можно, если заменить их абсолютными значениями или возвести в квадрат. Замена отклонений их абсолютными величинами нецелесообразна, так как действия с абсолютными величинами, как правило, вызывают затруднения. Поэтому следует использовать величину $(X-MX)^2$ (точнее, ее среднее значение) для характеристики рассеивания значений случайной величины.

Определение. *Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания MX называют дисперсией случайной величины X и обозначают DX, т. е.*

$$DX=M(X-MX)^2. \tag{5.17}$$

В пользу использования дисперсии DX в качестве характеристики рассеяния значений случайной величины говорит следующий факт: DX обладает свойством минимальности. Это означает, что

$$DX=\min_c [M(X-c)^2]. \tag{5.18}$$

Действительно, найдем минимум функции $F(c)=M(X-c)^2$. Представим эту функцию в виде

$$F(c)=M(X-c)^2=M[(X-MX)-(c-MX)]^2=M[(X-MX)^2+(c-MX)^2-$$
$$-2(X-MX)(c-MX)]=M(X-MX)^2+M(c-MX)^2+M[-2(X-MX)(c-MX)]=$$
$$=DX+M(c-MX)^2-2(c-MX)M(X-MX)=DX+M(c-MX)^2.$$

Итак,

$$F(c)=DX+M(c-MX)^2.$$

Минимум функции $F(c)$ достигается при $c=MX$, но тогда математическое ожидание

$$M(X-c)^2=M(X-MX)^2=DX,$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к формуле (5.17). Очевидно, что законы распределения вероятностей случайных величин X и $(X-MX)^2$ одинаковы. Если X является дискретной случайной величиной,

то по определению математического ожидания для случайной величины $(X-MX)^2$ имеем

$$DX=\sum_{i=1}^{n}(x_i-MX)^2 p_i. \tag{5.19}$$

Для непрерывной случайной величины с функцией плотности $f(x)$

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 f(x)\,dx. \tag{5.19'}$$

Если случайная величина и ее математическое ожидание имеют одну и ту же размерность, то дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Этого недостатка можно избежать, если воспользоваться средним квадратическим отклонением σ_X случайной величины, которым является арифметический корень из дисперсии. Таким образом, $\sigma_X=\sqrt{DX}$ — среднее квадратическое отклонение.

Задача 5.9. Случайная величина задана следующим рядом распределения:

X	2	4	7	10	12
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Так как случайная величина является дискретной, то для вычисления MX воспользуемся формулой (5.9), а для нахождения DX — формулой (5.19). Для удобства все результаты вычислений сведем в табл. 5.2.

Таблица 5.2

x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i-MX (x_i-7)	$(x-MX)^2$ $((x_i-7)^2)$	$(x_i-MX)^2 p_i$ $((xi-7)^2 p_i)$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	2	3	4	5	6	7	8
2	0,1	0,2	−5	25	2,5	4	0,4
4	0,2	0,8	−3	9	1,8	16	3,2
7	0,4	2,8	0	0	0	49	19,6
10	0,2	2,0	3	9	1,8	100	20,0
12	0,1	1,2	5	25	2,5	144	14,4
Σ	1	7,0			8,6		57,6

Очевидно, что сумма чисел, находящихся в третьем столбце, равна MX, а в шестом — DX. Тогда $MX=7$, $DX=8{,}6$. ▲

Задача 5.10. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<-1, \\ 3x^2 \text{ при } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 0 \text{ при } x>0. \end{cases}$$

Найти дисперсию этой случайной величины.

△ Предварительно найдем математическое ожидание, воспользовавшись формулой (5.11). Имеем

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{0} 3x^3\,dx=3x^4/4\,|_{-1}^{0}=-3/4.$$

Далее по формуле (5.19′) получаем

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x+3/4)^2\,3x^2\,dx=3\int_{-1}^{0}(x^4+(3/2)\,x^3+$$
$$+(9/16)\,x^2)\,dx=3(x^5/5+3x^4/8+3x^3/16)\,|_{-1}^{0}=0{,}0375.\ ▲$$

Рассмотрим основные свойства дисперсии.

1^0. *Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин, т. е.*

$$D(X\pm Y)=DX+DY. \tag{5.20}$$

□ Запишем для случайной величины $X\pm Y$ равенство (5.17). Имеем

$$D(X\pm Y)=M[(X\pm Y)-M(X\pm Y)]^2.$$

Воспользовавшись свойством 1^0 математического ожидания, получаем

$$D(X\pm Y)=M[X\pm Y-(MX\pm MY)]^2=M[(X-MX)\pm(Y-MY)]^2=$$
$$=M[(X-MX)^2\pm 2(X-MX)(Y-MX)+(Y-MY)^2]=$$
$$=M(X-MX)^2\pm M[2(X-MX)(Y-MY)]+M(Y-MY)^2.$$

Рассмотрим отдельно слагаемые в правой части полученного равенства. Используя свойства 2^0, 4^0 и 5^0 математического ожидания, для второго из слагаемых имеем

$$M[2(X-MX)(Y-MY)]=2M(X-MX)\,M(Y-MY)=0.$$

Первое и третье слагаемые, по определению, представляют собой соответствующие дисперсии DX и DX. Тогда можно записать

$$D(X\pm Y)=DX+DY.$$

Заметим, что дисперсия алгебраической суммы величин равна не алгебраической сумме, а просто сумме соответствующих дисперсий.

Доказанное свойство легко распространить на любое конечное число независимых случайных величин.

2°. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю, т. е.* $DC=0$.

□ Так как $MC=C$ (см. свойство 3°), то, согласно определению, имеем

$$DC=M(C-MC)^2=M(C-C)^2=M(0)=0\ ■.$$

Этот результат следовало ожидать, так как постоянная величина принимает всего одно значение, что говорит об отсутствии рассеивания значений величины.

3^0. *Постоянный множитель C случайной величины X можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат, т. е.*

$$D(CX)=C^2DX. \tag{5.21}$$

□ Так как постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания (см. свойство 4^0), то по определению дисперсии имеем

$$D(CX)=M[CX-M(CX)]^2=M[CX-CMX]^2=$$
$$=M[C(X-MX)]^2=M[C^2(X-MX)^2=C^2M(X-MX)^2=$$
$$=C^2DX.\ ■$$

4^0. *Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания, т. е.*

$$D(X)=M(X^2)-[MX]^2. \tag{5.22}$$

□ По определению дисперсии имеем

$$DX=M(X-MX)^2=M[X^2-2XMX+(MX)^2]=$$
$$=M(X^2)-M[2XMX]+M(MX)^2.$$

Так как $2MX$ и $(MX)^2$ — постоянные величины, то, используя свойства 3^0 и 4^0 математического ожидания, имеем

$$DX=M(X^2)-2MX\,MX+(MX)^2=M(X^2)-(MX)^2.\ ■$$

При расчетах формула (5.22) более удобна, чем формула (5.17).

Задача 5.11. Используя формулу (5.22), вычислить дисперсию по данным задачи 5.9.

△ Результаты вычислений представлены в табл. 5.2 (столбцы 1, 2, 3, 7, 8). Для вычисления $M(X^2)$ следует воспользоваться формулой

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i.$$

Тогда сумма чисел, находящихся в восьмом столбце, совпадает с $M(X^2)$. По формуле (5.22) находим

$$DX=57{,}6-7^2=8{,}6.\ ▲$$

Далее нам потребуются некоторые соотношения. Докажем их в качестве следствий свойств математического ожидания и дисперсии.

Ранее было введено понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Это отклонение

$X-MX$ называют *центрированной случайной величиной.* Было показано (см. свойство 5^0), что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. Найдем дисперсию этой случайной величины. На основании свойства 1^0 дисперсии имеем

$$D(X-MX)=DX+D(MX),$$

а так как $D(MX)=0$ (см. свойство 2^0 дисперсии), то

$$D(X-MX)=DX.$$

Следствие 1. *Дисперсии случайных величин X и $X-MX$ равны между собой.*

Иногда бывает удобно использовать безразмерные центрированные случайные величины. Величину $X-MX$ разделим на среднее квадратическое отклонение σ_X, имеющее ту же размерность. Вновь полученную случайную величину будем называть *стандартной случайной величиной.*

Обозначим эту величину Z. Таким образом,

$$Z=\frac{X-MX}{\sigma_X}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины Z. Имеем

$$MZ=M\left[\frac{X-MX}{\sigma_X}\right]=\frac{1}{\sigma_X}M(X-MX)=0,$$

$$DZ=D\left[\frac{X-MX}{\sigma_X}\right]=\frac{1}{\sigma_X^2}D(X-MX)=\frac{DX}{\sigma_X^2}.$$

Так как, по определению, $\sigma_X=\sqrt{DX}$, то

$$DZ=\frac{DX}{DX}=1.$$

Следствие 2. *Математическое ожидание стандартной случайной величины $Z=\frac{X-MX}{\sigma_X}$ равно* 0.

Следствие 3. *Дисперсия стандартной случайной величины $Z=\frac{X-MX}{\sigma_X}$ равна* 1.

В заключение отметим, что центрирование случайной величины геометрически означает перенос начала координат в точку с абсциссой, равной математическому ожиданию.

3. Начальные и центральные моменты. Прежде чем перейти к изучению указанных характеристик, рассмотрим пример.

Пример 5.9. Пусть случайная величина X задана следующим рядом распределения:

X	-150	3	4	5
P	0,02	0,18	0,6	0,2

Найдем математическое ожидание MX. Имеем

$$MX=-150\cdot 0{,}02+3\cdot 0{,}18+4\cdot 0{,}6+5\cdot 0{,}2=0{,}94.$$

Составим ряд распределения случайной величины X^2:

X^2	22500	9	16	25
P	0,02	0,18	0,6	0,2

Найдем математическое ожидание X^2. Имеем

$$M(X^2)=22500\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}18+16\cdot 0{,}6+25\cdot 0{,}2=466{,}22.$$

Нетрудно заметить, что $M(X^2)$ значительно больше MX. Это можно объяснить тем, что значение $x=-150$, намного отличающееся от остальных значений, при возведении в квадрат резко возросло. Однако вероятность этого значения (0,02) мала по сравнению с вероятностями других значений. ●

Таким образом, переходя от MX к $M(X^2)$, можно учесть наличие таких значений случайной величины, которые велики по абсолютной величине, но вероятность их появления мала, т. е. учесть их влияние на математическое ожидание. При переходе к более высоким степеням X это влияние только усиливается. Приведенный пример подтверждает целесообразность использования для этой цели математического ожидания целой положительной степени случайной величины.

Определение. *Начальным моментом k-го порядка ν_k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k, т. е.*

$$\nu_k=M(X^k). \tag{5.23}$$

Для дискретной случайной величины

$$\nu_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i. \tag{5.24}$$

Для непрерывной случайной величины

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\,dx. \tag{5.25}$$

Ранее уже отмечалось, что величина $X-M(X)$ связана с рассеиванием значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. Рассмотрим характеристики, в определении которых используется эта величина.

Определение. *Центральным моментом k-го порядка μ_k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X-MX)^k$, т. е.*

$$\mu_k=M(X-MX)^k. \tag{5.26}$$

Для дискретной случайной величины

$$\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-MX)^k p_i. \tag{5.27}$$

Для непрерывной случайной величины

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-MX)^k f(x)\,dx. \tag{5.28}$$

Воспользовавшись определениями и свойствами математического ожидания и дисперсии, можно показать, что

$$\nu_1=MX;\ \ \nu_2=M(X^2);$$
$$\mu_1=0;\ \ \mu_2=DX=\nu_2-\nu_1^2,$$
$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3,\ \ \mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4. \tag{5.29}$$

В определении центральных моментов используются отклонения случайной величины от ее математического ожидания (центра). Поэтому моменты называются *центральными*. В определении начальных моментов также используются отклонения случайной величины. Однако в этом случае отклонение берется не от математического ожидания, а от точки, абсцисса которой равна нулю, являющейся началом координат. Поэтому моменты называют *начальными*. Моменты могут рассматриваться не только относительно начала координат или математического ожидания, но и относительно произвольной точки $x=a$:

$$\gamma_k=M(X-a)^k.$$

Предложим, что распределение случайной величины симметрично относительно математического ожидания. Тогда все центральные моменты нечетного порядка равны нулю. Это можно объяснить тем, что для каждого положительного значения величины $X-MX$ найдется (в силу симметричности распределения относительно MX) равное ему по абсолютной величине отрицательное значение этой величины, причем их вероятности будут одинаковыми. Поэтому при $k=2n+1$ сумма $\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-MX)^k p_i$ будет равна нулю. То же самое можно сказать и про интеграл

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^k f(x)\,dx,$$

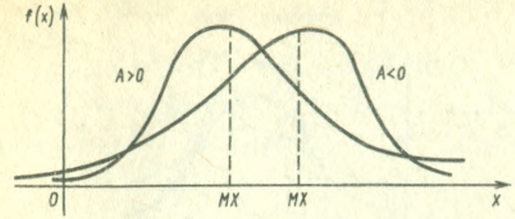

Рис. 5.18

который равен нулю как интеграл в симметричных пределах от нечетной функции, в чем можно убедиться предварительно выполнив замену переменной по формуле $t=x-MX$. Если центральный момент нечетного порядка не равен нулю, то это говорит об асимметричности распределения и чем больше момент, тем больше асимметрия. Поэтому в качестве характеристики асимметрии распределения разумнее всего взять какой-нибудь нечетный центральный момент. Так как центральный момент первого порядка всегда равен нулю, то целесообразно для этой цели использовать центральный момент третьего порядка.

Определение. *Коэффициентом асимметрии A называется величина μ_3/σ_X^3, т. е.*

$$A=\mu_3/\sigma_X^3. \tag{5.30}$$

Если коэффициент асимметрии отрицательный, то это говорит о большем влиянии на величину μ_3 отрицательных отклонений. В этом случае кривая распределения (рис. 5.18) более полога слева от MX. Если коэффициент A положительный, а значит, преобладает влияние положительных отклонений, то кривая распределения (рис. 5.18) более полога справа.

Как известно, второй центральный момент (дисперсия) служит для характеристики рассеивания значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. Если этот момент для некоторой случайной величины достаточно большой, т. е. рассеивание велико, то соответствующая кривая распределения более пологая, чем кривая распределения случайной величины, имеющей меньший момент второго порядка. Однако нормированный момент $\mu_2=DX$ не может служить характеристикой «плосковершинности» или «островершинности» распределения потому, что для любого распределения $\mu_2/\sigma_X^2=DX/(\sqrt{DX})^2=1$. В этом случае следует использовать центральный момент четвертого порядка.

Определение. *Эксцессом E называется величина*

$$E=\mu_4/\sigma_X^4-3. \tag{5.31}$$

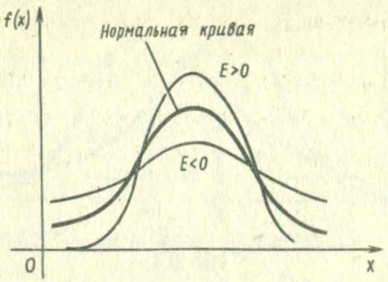

Рис. 5.19

Можно показать, что для наиболее распространенного в природе нормального закона распределения, который будет рассматриваться в следующей главе, отношение $\mu_4/\sigma_X^4=3$. Поэтому эксцесс, заданный формулой (5.31), служит для сравнения данного распределения с нормальным, у которого эксцесс равен нулю. Если для данного распределения эксцесс положительный, то это означает, что соответствующая кривая распределения более островершинная по сравнению с кривой нормального распределения. Распределения с отрицательным эксцессом имеют более «плосковершинные» кривые распределения по сравнению с нормальным (рис. 5.19).

○ **Задача 5.12.** Случайная величина задана функцией

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-2, \\ (-1/4)x^3 & \text{при } -2\leqslant x\leqslant 0, \\ 0 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

Найти коэффициент асимметрии и эксцесс.

Предварительно вычислим начальные моменты до четвертого порядка. Имеем:

$$\nu_1=MX=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}x^4\,dx=-\frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\bigg|_{-2}^{0}=-1{,}6;$$

$$\nu_2=M(X^2)=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}x^5\,dx=-\frac{1}{4}\frac{x^6}{6}\bigg|_{-2}^{0}=8/3\approx 2{,}67;$$

$$\nu_3=M(X^3)=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}x^6\,dx=-\frac{1}{4}\frac{x^7}{7}\bigg|_{-2}^{0}=-32/7\approx 4{,}57;$$

$$\nu_4=M(X^4)=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}x^7\,dx=-\frac{1}{4}\frac{x^8}{8}\bigg|_{-2}^{0}=8.$$

Теперь, воспользовавшись формулами (5.29), найдем центральные моменты:

$$\mu_2=DX=\nu_2-\nu_1^2\approx 2{,}67-(1{,}6)^2\approx 0{,}11;$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3\approx -4{,}57+3\cdot 1{,}6\cdot 2{,}67-2\cdot(1{,}6)^3\approx 0{,}054;$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4\approx 8-4\cdot 1{,}6\cdot 4{,}57+6(1{,}6)^2\cdot 2{,}67-3(1{,}6)^4\approx 0{,}1024.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_X=\sqrt{DX}\approx 0{,}33;\quad \sigma_X^3\approx 0{,}036;\quad \sigma_X^4\approx 0{,}0121.$$

Далее имеем

$$A=\mu_3/\sigma_X^3\approx 1{,}5;\quad E=\mu_4/\sigma_X^4-3\approx 5{,}46.$$

ГЛАВА 6. ВИДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 6.1. Равномерное распределение

На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность (обладают одной и той же плотностью вероятностей).

Например, при поломке часов остановившаяся минутная стрелка будет с одинаковой вероятностью (плотностью вероятности) показывать время, прошедшее от начала данного часа до поломки часов. Это время является случайной величиной, принимающей с одинаковой плотностью вероятности значения, которые не выходят за границы, определенные продолжительностью одного часа. К подобным случайным величинам относится также и погрешность округления. Про такие величины говорят, что они распределены равномерно, т. е. имеют равномерное распределение.

Определение. *Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке плотность распределения вероятности случайной величины постоянна, т. е. если дифференциальная функция распределения $f(x)$ имеет следующий вид*:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<a, \\ c & \text{при } a\leqslant x\leqslant b, \\ 0 & \text{при } x>b. \end{cases}$$

Иногда это распределение называют *законом равномерной плотности*. Про величину, которая имеет равномерное распределение на некотором отрезке, будем говорить, что она распределена равномерно на этом отрезке. График плотности вероятности $f(x)$ равномерного распределения изображен на рис. 6.1. Найдем значение постоянной c. Так как площадь, ограниченная кривой распределения и осью Ox, равна 1, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{a}^{b} c\,dx=c(b-a)=1,$$

откуда $c=1/(b-a)$.

Теперь функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<a, \\ 1/(b-a) & \text{при } a\leqslant x\leqslant b, \\ 0 & \text{при } x>b. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Построим функцию распределения $F(x)$, для чего найдем выражение $F(x)$ на интервале $[a, b]$. По формуле (5.8) имеем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\,dt=\frac{t}{b-a}\Bigg|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

При $x<a$ функция $F(x)=0$ и $F(x)=1$ при $x>0$. Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\leqslant x\leqslant b, \\ 1 & x>b. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 6.2.

Найдем основные числовые характеристики рассматриваемой случайной величины.

По формуле (5.10) находим математическое ожидание:

$$MX=\int_{a}^{b} x f(x)\,dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}\,dx=\frac{b+a}{2}.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, совпадает с серединой этого отрезка.

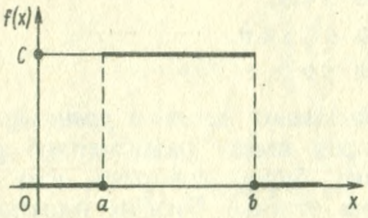

Рис. 6.1

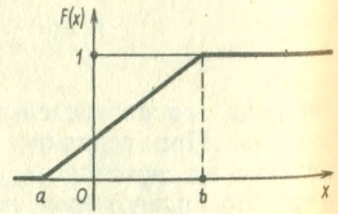

Рис. 6.2

По формуле (5.19′) находим дисперсию:

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 f(x)\,dx=\int_{a}^{b}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{(b-a)^2}{12},$$

откуда сразу же следует, что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Так как исследуемое распределение симметрично относительно математического ожидания, то для него центральные моменты, имеющие нечетный порядок, равны нулю, а значит, коэффициент асимметрии тоже равен нулю, т. е.

$$A=\mu_3/\sigma_X^3=0.$$

Для определения эксцесса находим центральный момент четвертого порядка:

$$\mu_4=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^4 f(x)\,dx=\int_{a}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^4\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{(b-a)^4}{80}.$$

Тогда

$$E=\mu_4/\sigma_X^4-3=\frac{(b-a)^4\cdot 144}{80(b-a)^4}-3=-1{,}2.$$

Найдем теперь вероятность попадания значения случайной величины, имеющей равномерное распределение, на интервал (α, β), принадлежащий целиком отрезку $[a, b]$. По формуле (5.6) имеем

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

т. е. вычисленная вероятность равна отношению длины отрезка $[\alpha, \beta]$ к длине отрезка $[a, b]$. Геометрически эта вероятность представляет собой площадь прямоугольника, заштрихованного на рис. 6.3.

В заключение отметим, что числа a и b, которые называются *параметрами распределения*, однозначно определяют равномерное распределение.

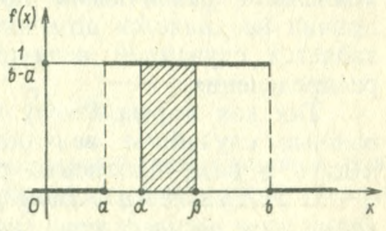

Рис. 6.3