СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Под редакцией А. В. ЕФИМОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

точки попадания не меньше ординаты}, $B=$ {произведение координат точки неотрицательно}, $C=$ {сумма абсолютных величин координат точки превышает единицу}. Выявить пары совместных событий.

14.6. На отрезке $[a, b]$ наудачу ставится точка. Пусть x — координата этой точки. Затем на отрезке $[a, x]$ наудачу ставится еще одна точка с координатой y. Наблюдаемый результат — пара чисел (x, y). События: $A=$ {вторая точка ближе к правому концу отрезка $[a, b]$, чем к левому}, $B=$ {расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка}, $C=$ {первая точка ближе ко второй, чем к правому концу отрезка $[a, b]$}. Выявить пары несовместных событий.

14.7. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат — пара чисел (x, y), где x — время прихода Петра, y — время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). Событие $A=$ {встреча состоялась}.

14.8 (продолжение). В условиях эксперимента задачи 14.7 рассмотреть следующие события: $B=$ {Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался}, $C=$ {Ивану не пришлось ждать Петра}.

14.9 (продолжение). В условиях эксперимента задачи 14.7 рассмотреть события: $D=$ {встреча состоялась после 11 ч 30 мин}, $E=$ {Иван опоздал на встречу}, $F=$ {встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.

14.10*. Проводится матч на первенство страны по футболу между командами «Динамо» и «Спартак». Интересующие нас события: $A=$ {выиграла команда «Динамо»}, $B=$ {игра закончилась победой одной из команд}, $C=$ {игра закончилась со счетом 3:1 в пользу «Спартака»}, $D=$ {в игре забито не меньше трех голов}.

14.11*. С помощью специального прибора регистрируется направление φ и скорость ветра v в данном месте Земли. Прибор устроен таким образом, что позволяет определять скорость ветра сколь угодно точно, а регистрация направления ветра возможна лишь с точностью до 2°. Установить, наблюдаемы ли в данном эксперименте события: $A=\{(v, \varphi)\,|\,v<12$ км/ч, $\varphi=343°35'\}$, $B=\{(v, \varphi)\,|\,v=15{,}5$ км/ч, $340°\leqslant\varphi<350°\}$, $C=\{(v, \varphi)\,|\,v\geqslant 3{,}25$ км/ч, $48°\leqslant\varphi\leqslant 51°\}$.

тий. Докажем, что событие $(A+B)C$ тождественно событию $AC+BC$. Пусть $\omega\in(A+B)C$. Это значит, что $\omega\in C$ и принадлежит по крайней мере одному из событий A или B. Но тогда ω принадлежит хотя бы одному из событий AC или BC, т. е. $\omega\in AC+BC$. Наоборот, пусть $\omega\in AC+BC$. Тогда $\omega\in AC$ или $\omega\in BC$. Следовательно, $\omega\in C$ и, кроме того, принадлежит по крайней мере одному из событий A или B, т. е. $\omega\in(A+B)C$. Тем самым тождественность левой и правой частей доказана.

Проиллюстрируем свойство в) диаграммами Венна. Пусть события означают: $A=\{$попадание в квадрат$\}$, $B=\{$попадание в круг$\}$, $C=\{$попадание в треугольник$\}$. Соответствующие области изображены на рис. 118. Горизонтальной штриховкой отмечена область, соответствующая событию AC, вертикальной — событию BC, косая штриховка соответствует событию $AC+BC$. ►

В задачах 14.12—14.17 доказать справедливость следующих тождеств:

14.12. $A+A=A$, $AA=A$, $A+\varnothing=A$, $A\varnothing=\varnothing$, $A\Omega=A$, $A+\Omega=\Omega$.

14.13. $A+\bar{A}=\Omega$, $\bar{\Omega}=\varnothing$, $\bar{\varnothing}=\Omega$, $A\bar{A}=\varnothing$.

14.14. а) $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$ (правила де Моргана). б) Обобщить правила де Моргана на произвольное число n событий.

14.15.** $AB+C=(A+C)(B+C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

14.16. $A-B=A\bar{B}$.

14.17*. $(A+B)-B=A-AB=A\bar{B}=A-B$.

Замечание. Этот пример показывает, что «приведение подобных членов» в алгебре событий недопустимо.

14.18. Пусть A, B и C — события, наблюдаемые в эксперименте, причем A и B несовместны. Показать, что события AC и BC также несовместны.

14.19. Показать, что:

а) если $A\subset B$, то выполняются соотношения

$$AB=A,\qquad A+B=B; \tag{1}$$

б) из справедливости любого из соотношений (1) следует

$$A\subset B.$$

14.20. Пусть A и B — наблюдаемые события в эксперименте. Показать, что событие $A+B$ можно разложить на сумму несовместных событий следующими способами:

а) $A+B=A+(B-AB)$; б) $A+B=AB+A\bar{B}+\bar{A}B$;
в) $A+B=A+B\bar{A}$.

14.21*. Показать, что если $A\subset B$, то $\bar{B}\subset\bar{A}$.

14.22. Показать, что если $B\subset A$, то $(A-B)+B=A$.

Доказать тождества:

14.23. $(A+B)(A+\bar{B})=A$.

14.24. $(A+B)(\bar{A}+B)(A+\bar{B})=AB$.

14.25. $(\bar{A}+BC)(\bar{B}+AC)(\bar{C}+AB)=ABC+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

14.26*. $AC-B=AC-BC$.

14.27*. $(A-B)+(A-C)=A-BC$.

Симметрическая разность двух событий $A\triangle B$ определяется следующим образом:

$$A\triangle B=(A-B)+(B-A).$$

Доказать следующие тождества:

14.28. $A\triangle B=(A+B)-AB$.

14.29. $\overline{A\triangle B}=AB+\bar{A}\bar{B}$.

14.30. $A\triangle B=(\overline{A\bar{B}})\triangle(\overline{\bar{A}B})$.

14.31. Пусть $C=A\triangle B$. Доказать, что $A\triangle C=B$.

14.32. Найти случайное событие X из равенства

$$\overline{X+A}+\overline{X+\bar{A}}=B.$$

14.33**. Доказать, что $A-B=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $A\subset B$.

14.34*. Очередной посетитель входит в зал музея, где уже собралось $2n$ человек, и начинает отыскивать знакомых среди собравшихся. Интересующие нас события: $A=$ $=\{$среди собравшихся найдется n человек, знакомых посетителю$\}$, $B=\{$среди собравшихся найдется n человек, незнакомых посетителю$\}$. Доказать, что события $A+B$ и $\overline{A-B}+\bar{B}$ достоверные.

Пусть A, B, C — три события, наблюдаемые в данном эксперименте. В задачах 14.35—14.37 выразить указанные события в алгебре событий.

14.35. $E_1=\{$из трех событий A, B, C произойдет ровно одно$\}$, $F_1=\{$из трех событий A, B, C произойдет ровно два$\}$.

14.36. $E_2=\{$из трех событий A, B, C произойдет хотя бы одно$\}$, $F_2=\{$из трех событий A, B, C произойдет не меньше двух$\}$.

14.37. $E_3=\{$из трех событий A, B, C не произойдет ни одного$\}$, $F_3=\{$из трех событий A, B, C произойдет хотя бы два$\}$, $G=\{$из трех событий A, B, C не произойдет хотя бы одно$\}$.

14.38. Поражение боевого самолета может наступить или в результате поражения обоих двигателей (события D_1 и D_2), или в результате попадания в кабину пилота ятности (12), получим

$$P(A)=0{,}1\cdot0{,}95+0{,}9\cdot0{,}03=0{,}122. \quad ▶$$

14.225. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки — в 20%, Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки — 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

14.226. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10% и третьего — 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% — со второго и 50% — с третьего?

14.227. Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех дает α% брака, второй — β%. Для контроля отобрано n_1 деталей из первого цеха и n_2 из второго. Эти n_1+n_2 деталей смешаны в одну партию, и из нее наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

14.228. Производится n независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью p_1, если два снаряда — с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

14.229. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% — вторую, 20,9% — третью и 7,9% — четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

14.230. В условиях эксперимента, описанного в задаче 14.202, сигналы 0 и 1 передаются с равной вероятностью. Вычислить вероятность события $C=\{$принято два одинаковых символа$\}$.

где $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$ — полная вероятность осуществления события A.

Формула Байеса позволяет «переоценить» вероятность каждой из гипотез после поступления новой «информации» относительно осуществления тех или иных наблюдаемых событий.

Пример 18. В условиях эксперимента, описанного в примере 16, случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?

◀ В обозначениях примера 16 требуется вычислить $P(H_2/A)$ (апостериорную условную вероятность гипотезы H_2). По формуле Байеса

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}9\cdot 0{,}03}{0{,}122}\approx 0{,}221.$$

Таким образом, апостериорная условная вероятность того, что транзистор на самом деле исправный, если известно, что он был признан дефектным, существенно меньше априорной вероятности гипотезы H_2, что явилось следствием поступившей информации. ▶

14.242. В урне лежит шар неизвестного цвета — с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

14.243. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 — только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0,7; если только помеха, — то с вероятностью 0,3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

14.244. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна 0,9, второго — 0,8. За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятности следующих событий: $A_1=\{$отказал только первый узел$\}$, $A_2=\{$отказали оба узла$\}$.

14.245. В условиях эксперимента, описанного в примере 12, найти условную вероятность $P(A/B)$, считая известной условную вероятность $P(B/A)$ и применяя формулу Байеса.

14.246. В коробке находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объему. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости шестерка появляется с вероятностью 1/3, единица — с вероятностью 1/9, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлеченная из коробки игральная кость была подброшена и в результате выпало 6 очков. Найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость.

14.247. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны p_1, p_2 и p_3. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?

14.248. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении $n_1:n_2:n_3$, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны p_1, p_2 и p_3. Прибор, приобретенный научно-исследовательским институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что данный прибор произведен первым заводом (марка завода на приборе отсутствует)?

14.249. Число бракованных микросхем на 1000 априори считается равновозможным от 0 до 3. Наудачу опробованы 100 микросхем, оказавшиеся исправными. Какова вероятность, что все схемы исправны?

14.250. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 — удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные — 20, подготовленные удовлетворительно — 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез: $H_1=\{$студент подготовлен отлично или хорошо$\}$, $H_2=\{$студент подготовлен удовлетворительно$\}$, $H_3=\{$студент подготовлен плохо$\}$.

Особое значение приобретает формула Байеса для таких экспериментов, в которых гипотезы H_k непосредственно не наблюдаемы, хотя априорные вероятности $P(H_k)$ и соответствующие условные вероятности $P(A/H_k)$, $k=1, \ldots, n$, известны из дополнительных опытов. Такая ситуация может иметь место, например, если отсутствует прибор, позволяющий регистрировать факт осуществления данных гипотез, или же если применение прибора для регистрации осуществления гипотез приводит к разрушению

Так как производная функции $F_X(x/c)$ существует всюду, кроме точек $x=-1$ и $x=1$, где она терпит разрыв первого рода, то полагаем

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x/c)}{dx}=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant -1,\\ (1-2c)\,x+\frac{1}{2}, & \text{если } -1<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } x>1,\end{cases}$$

причем $1/4\leqslant c\leqslant 3/4$.

Нетрудно убедиться (проверьте!), что все свойства функции плотности распределения в этом случае выполняются. ►

14.257. Доказать, что для дисперсии σ_X^2 случайной величины X справедлива формула

$$\sigma_X^2=\alpha_2-m_X^2.$$

14.258. Закон распределения случайной величины X дискретного типа задан следующей таблицей:

x_i	1	2	3	4
p_i	1/16	1/4	1/2	3/16

Найти m_X и $P\{X>2\}$.

14.259 (продолжение). Для случайной величины из предыдущей задачи найти D_X и d_X.

14.260 (продолжение). Для случайной величины из задачи 14.258 построить график функции распределения $F_X(x)$.

14.261. Производится один опыт, в результате которого событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q=1-p$. Пусть X — *индикаторная случайная величина* — принимает значение 1, если событие A произошло, и значение 0, если событие A не имело места. Описать закон распределения случайной величины X, функцию распределения, вычислить математическое ожидание.

14.262 (продолжение). Для случайной величины из предыдущей задачи найти дисперсию, третий центральный момент и определить значение вероятности p, при котором дисперсия максимальна.

14.263. В условиях примера 2 найти константу c, если плотность распределения вероятностей непрерывна в точке $x=1$, и изобразить график функции распределения $F_X(x)$. Вычислить для полученного распределения m_X и h_X.

14.264 (продолжение). Для случайной величины из предыдущей задачи вычислить $P\{X>0\}$ и $P\{-1/2<X\leqslant 1/2\}$.

14.265. Функция распределения случайной величины X дискретного типа имеет следующий вид:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant 2,\\ 0{,}3, & \text{если } 2<x\leqslant 3,\\ 0{,}5, & \text{если } 3<x\leqslant 4,\\ 1, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

Вычислить $P\{X\geqslant 3{,}5\}$ и $P\{|X|<2{,}5\}$.

14.266 (продолжение). Описать закон распределения случайной величины X из предыдущей задачи и найти m_X и D_X.

14.267. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго p_2. Случайная величина X — суммарное число попаданий в мишень в данном эксперименте. Описать закон распределения данной случайной величины и найти m_X и D_X.

14.268. Один раз брошены три одинаковые игральные кости. Случайная величина X принимает значение 1, если хотя бы на одной игральной кости выпадет цифра шесть; принимает значение 0, если шестерка не выпала ни на одной грани, но хотя бы на одной из граней появилась цифра 5, и принимает значение —1 в остальных случаях. Описать закон распределения случайной величины X, вычислить функцию распределения и найти математическое ожидание и моду распределения.

14.269. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью распределения вероятностей вида

$$f_X(x)=\begin{cases}c\cos x, & \text{если } -\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ 0, & \text{если } |x|>\pi/2.\end{cases}$$

Найти константу c, вычислить $P\{|X|<\pi/4\}$, m_X и D_X.

14.270 (продолжение). Квантилью какого порядка для данного в предыдущей задаче распределения является точка $x=\pi/4$?

Центральные моменты нормального распределения удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mu_{n+2}=(n+1)\sigma^2\mu_n, \qquad n=1, 2, \ldots \qquad (12)$$

Отсюда следует, что все центральные моменты нечетного порядка равны нулю (так как $\mu_1=0$).

Пример 7. Производится измерение без систематических ошибок диаметра вала. Случайные ошибки измерения X подчиняются нормальному распределению со *стандартным отклонением* 10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

◀ Так как по условию систематические ошибки отсутствуют, то $m_X=0$ мм. «Стандартное отклонение» — это другое название для среднеквадратического отклонения, часто используемое на практике. Поэтому $\sigma=10$ мм.

Для искомой вероятности попадания в симметричный интервал используем формулу

$$\mathsf{P}\{|X|<15\}=2\Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right)-1=2\Phi(1{,}5)-1.$$

По таблице П1 находим $\Phi(1{,}5)\approx 0{,}9332$. Таким образом,

$$\mathsf{P}\{|X|<15\}\approx 0{,}8664. \ ▶$$

14.361. Случайная величина X нормально распределена с параметрами $m=1$, $\sigma=2$. Выразить ее функцию распределения через функцию $\Phi(x)$.

14.362. Случайная величина X распределена по закону $N(m, \sigma)$. Пользуясь таблицей функции нормального распределения, вычислить вероятность p_k того, что отклонение величины X от ее математического ожидания не превзойдет величины $k\sigma$ (ответ получить для трех значений $k=1, 2, 3$).

14.363. Измеряемая случайная величина X подчиняется закону распределения $N(10{,}5)$. Найти симметричный относительно m_X интервал, в который с вероятностью p попадет измеренное значение. Рассмотреть следующие числовые значения: а) $p=0{,}9974$; б) $p=0{,}9544$; в) $p=0{,}50$.

14.364. Химический завод изготовляет серную кислоту номинальной плотности 1,84 г/см³. В результате статистических испытаний обнаружено, что практически 99,9% всех выпускаемых реактивов имеют плотность в интервале (1,82; 1,86). Найти вероятность того, что кислота удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы ее плотность не отклонялась от номинала более, чем на 0,01 г/см³.

14.365. В нормально распределенной совокупности 15% значений x меньше 12 и 40% значений x больше 16,2. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

14.366. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X контролируемого размера от номинала не превышает 10 мм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением σ. Считая, что для данной технологии $\sigma=5$ и X нормально распределена, выяснить, сколько процентов годных деталей изготовляет автомат.

14.367 (продолжение). В условиях предыдущей задачи выяснить, какой должна быть точность изготовления, чтобы процент годных деталей повысился до 98?

14.368. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940 г?

14.369*. Деталь изготавливается на станке. Ее размер X представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 20 см и дисперсией 0,2 см². Какую относительную точность изделия можно гарантировать с вероятностью 0,95?

14.370. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик проходит через отверстие диаметра d_2, но не проходит через отверстие диаметра $d_1<d_2$, то шарик считается годным. Если какое-либо из этих условий нарушается, то шарик бракуется. Считается, что диаметр шарика X — случайная величина, распределенная по закону $N\left(\frac{d_1+d_2}{2}, \alpha(d_2-d_1)\right)$, где параметр α $(0<\alpha<1/2)$ определяет точность изготовления шариков. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

14.371 (продолжение). В условиях предыдущей задачи определить, какую точность изготовления следует установить (т. е. каким следует выбрать параметр α), чтобы брак составлял не более 2% всей продукции?

14.372. Случайная величина X подчиняется закону $N(1, \sigma)$. Известно, что $\mathsf{P}\{X<2\}=0{,}99$. Вычислить $\mathsf{M}[X^2]$ и $\mathsf{P}\{X^2>2\}$.

14.373. Случайная величина X распределена по закону $N(m, \sigma)$. Вычислить $p_1=\mathsf{P}\{X\geqslant x_{n2}\}$ и $p_2=\mathsf{P}\{x_{n1}\leqslant X\leqslant x_{n2}\}$, где x_{n1} и x_{n2} — точки перегиба кривой плотности распределения вероятностей.

14.374** (продолжение). Пусть (a, b) — интервал, не содержащий m_X. В условиях предыдущей задачи определить, при каком σ вероятность $Q(\sigma)=\mathsf{P}\{a\leqslant X<b\}$ будет наибольшей?

14.551.

x_{ni}	$-na$	0	na
$\mathrm{P}\{X_n=x_{ni}\}$	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

14.552.

x_{ni}	$-na$	0	na
$\mathrm{P}\{X_n=x_{ni}\}$	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

14.553.

x_{ni}	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
$\mathrm{P}\{X_n=x_{ni}\}$	1/2	1/2

14.554. Для некоторого автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации на городских линиях, равно 5. Оценить вероятность события $A=\{$по истечении месяца в данном автопарке будет отправлено в ремонт меньше 15 автобусов$\}$, если информация о дисперсии отсутствует.

14.555 (продолжение). Оценить вероятность события A из предыдущей задачи, если дисперсия равна 4.

2. Предельные теоремы теории вероятностей.

Теорема Бернулли. *Относительная частота успехов в n независимых испытаниях по схеме Бернулли сходится по вероятности при $n\to\infty$ к вероятности успеха в одном испытании.*

Центральная предельная теорема (*в упрощенной формулировке Ляпунова*). *Если случайные величины в последовательности $\{X_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечные математическое ожидание m_X и дисперсию σ_X^2, то для любого действительного x*

$$F_{Y_n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

где $Y_n=\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_n-m_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$ — *стандартизованное среднее арифметическое n случайных величин в последовательности.*

Следствиями центральной предельной теоремы являются следующие две предельные теоремы, относящиеся к схеме Бернулли:

в одном испытании $p=0{,}6$. Считая применимыми предельные теоремы Муавра—Лапласа, вычислить вероятности следующих событий:

$B=\{$событие A произойдет в большинстве из 60 испытаний$\}$, $C=\{$число успешных осуществлений события A в 60 испытаниях будет заключено между 30 и 42$\}$.

14.557 (продолжение). В условиях предыдущей задачи найти вероятность события $D=\{$событие A осуществится 36 раз в 60 испытаниях$\}$.

14.558. Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятности следующих событий: $A=$ $=\{$в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок$\}$, $B=\{$будет сделано ровно 7 ошибок$\}$.

14.559. Вероятность рождения мальчика $p=0{,}512$. Считая применимыми локальную и интегральную теоремы Муавра—Лапласа, вычислить вероятность события $A=\{$среди 100 новорожденных будет 51 мальчик$\}$, $B=$ $=\{$среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек$\}$.

14.560 (продолжение). В условиях предыдущей задачи найти вероятность события $C=\{$разница между количеством мальчиков и количеством девочек из 100 новорожденных не превысит 10$\}$.

14.561. Складывается 10^3 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-3}. Предполагая, что ошибки от округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0{,}5\cdot10^{-3}, 0{,}5\cdot10^{-3})$, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,998 заключена суммарная ошибка.

14.562*. Случайная величина X — результат измерения некоторой физической величины, закон распределения которой неизвестен. Определить, какую максимально возможную относительную точность измерения можно гарантировать с вероятностью, не меньшей 0,95, при следующих данных: а) известно, что $m_X=0{,}1$, $\sigma_X=0{,}02$ и проводится одно измерение; б) проводится 5 измерений и в качестве результата X берется среднее арифметическое измеренных значений.

14.563 (продолжение). Решить предыдущую задачу, если берется среднее арифметическое 100 измерений и считается допустимым воспользоваться предельным законом распределения суммы согласно центральной предельной теореме.

14.564. Отдел технического контроля проверяет качество наудачу отобранных 900 деталей. Вероятность p того, что деталь стандартна, равна 0,9. Случайная величина X — число стандартных деталей в партии. Найти наименьший интервал, симметричный относительно m_X, в котором с вероятностью, не меньшей 0,9544, будет заключено число стандартных деталей.

14.565. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 руб. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000 руб. Найти вероятность события $A=\{$по истечении года работы страховая компания потерпит убыток$\}$.

14.566 (продолжение). В условиях предыдущей задачи найти вероятность события $B_m=\{$страховая компания получит прибыль не менее m руб.$\}$, если $m=40\,000$, $60\,000$, $80\,000$.

14.567. 500 раз подбрасывается игральная кость. Какова вероятность того, что частота выпадения шестерки окажется в интервале $\left(\frac{1}{6}-0{,}05;\ \frac{1}{6}+0{,}05\right)$?

14.568. В опыте Бюффона монета была подброшена 4040 раз, причем герб выпал 2048 раз. С какой вероятностью можно при повторении опыта получить такое же или еще большее отклонение относительной частоты успехов от вероятности успеха в одном опыте?

14.569. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,975, утверждать, что частота выпадения герба попадет в интервал (0,4; 0,6)? Получить оценку указанного числа, используя второе неравенство Чебышева.

14.570 (продолжение). Получить оценку указанного в предыдущей задаче числа подбрасываний монеты, считая применимой интегральную теорему Муавра—Лапласа.

14.571*. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 3:2. Производятся последовательные опыты по извлечению одного шара с возвращением, причем каждый раз фиксируется цвет вынутого шара. Каково минимальное число извлечений, при котором с вероятностью, не меньшей 0,9948, можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит величины $\varepsilon=$ $=0{,}05$?

$x \leqslant x^{(1)}$ и $F_n^*(x)=1$ при $x > x^{(n)}$. На промежутке $(x^{(1)}, x^{(n)}]$ $F_n^*(x)$ представляет собой неубывающую кусочно постоянную функцию.

Аналогично формуле (1) определяется эмпирическая функция распределения для группированной выборки.

Значение эмпирической функции распределения для статистики определяется следующим утверждением.

Теорема (Гливенко). *Пусть $F_n^*(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из генеральной совокупности с функцией распределения $F_X(x)$. Тогда для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ и любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|F_n^*(x)-F_X(x)\right| < \varepsilon\right)=1.$$

Таким образом, при каждом x $F_n^*(x)$ сходится по вероятности к $F_X(x)$ и, следовательно, при большом объеме выборки может служить приближенным значением (оценкой) функции распределения генеральной совокупности в каждой точке x.

В ряде случаев для наглядного представления выборки используют гистограмму и полигон частот.

Гистограммой частот группированной выборки называется кусочно постоянная функция, постоянная на интервалах группировки и принимающая на каждом из них значения $\frac{n_i}{b}$, $i=1, 2, \ldots, k$, соответственно. Площадь ступенчатой фигуры под графиком гистограммы равна объему выборки n.

Аналогично определяется *гистограмма относительных частот*. Площадь соответствующей ступенчатой фигуры для нее равна единице. При увеличении объема выборки и уменьшении интервала группировки гистограмма относительных частот является статистическим аналогом плотности распределения $f_X(x)$ генеральной совокупности.

Полигоном частот называется ломаная с вершинами в точках $\left(z_i, \frac{n_i}{b}\right)$, $i=1, 2, \ldots, k$, а *полигоном относительных частот* — ломаная с вершинами в точках $\left(z_i, \frac{n_i}{nb}\right)$, $i=1, 2, \ldots, k$. Таким образом, полигон относительных частот получается из полигона частот сжатием по оси Oy в n раз.

Если плотность распределения генеральной совокупности является достаточно гладкой функцией, то полигон относительных частот является более хорошим приближением плотности, чем гистограмма.

Пример 3. Построить гистограмму и полигон частот, а также график эмпирической функции распределения группированной выборки из примера 2.

◀ По результатам группировки (см. таблицу 1.1) строим гистограмму частот (рис. 141). Соединяя отрезками ломаной середины верхних оснований прямоугольников, из которых состоит полученная гистограмма, получаем соответствующий полигон частот (рис. 142).

Так как середина первого интервала группировки $z_1=11$, то $F_n^*(x)=0$ при $x \leqslant 11$. Рассуждая аналогично, находим, что $F_n^*(x)=1$ при $x > 23$. На полуинтервале $(11, 23]$ эмпирическую функцию распределения строим по данным третьего и последнего столбцов

таблицы 1.1. $F_n^*(x)$ имеет скачки в точках, соответствующих серединам интервалов группировки. В результате получаем график $F_n^*(x)$, изображенный на рис. 143. ▶

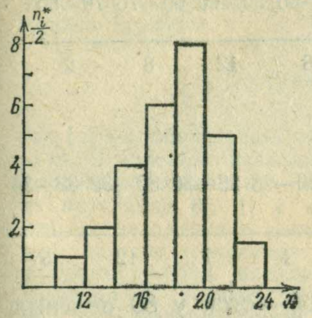

Рис. 141

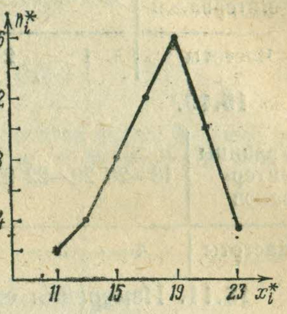

Рис. 142

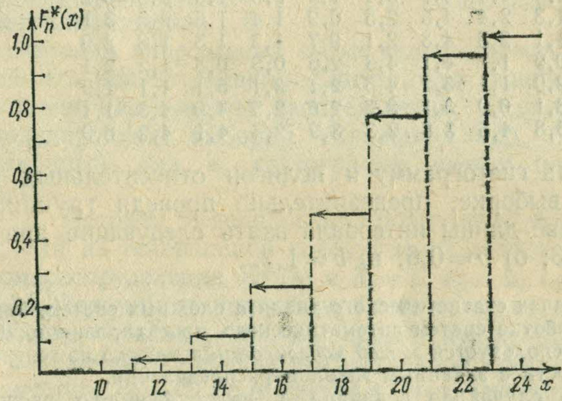

Рис. 143

В задачах 15.7—15.10 построить графики эмпирических функций распределения, гистограммы и полигоны частот для выборок, представленных статистическими рядами.

15.7.

z_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

15.8.

z_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

15.9.

Границы интервалов	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
Частоты	1	2	7	18	12	8	2

15.10.

Границы интервалов	18—20	20—22	22—24	24—26	26—28	28—30	30—32	32—34
Частоты	4	3	3	2	4	7	12	5

15.11. Измерения емкости затвор—сток у 80 полевых транзисторов дали следующие результаты:

1,9	3,1	1,3	0,7	3,2	1,1	2,9	2,7	2,7	4,0
1,7	3,2	0,9	0,8	3,1	1,2	2,6	1,9	2,3	3,2
4,1	1,3	2,4	4,5	2,5	0,9	1,4	1,6	2,2	3,1
1,5	1,1	2,3	4,3	2,1	0,7	1,2	1,5	1,8	2,9
0,8	0,9	1,7	4,1	4,3	2,6	0,9	0,8	1,2	2,1
3,2	2,9	1,1	3,2	4,5	2,1	3,1	5,1	1,1	1,9
0,9	3,1	0,9	3,1	3,3	2,8	2,5	4,0	4,3	1,1
2,1	3,8	4,6	3,8	2,3	3,9	2,4	4,1	4,2	0,9

Построить гистограмму и полигон относительных частот по этой выборке, предварительно проведя группировку. В качестве длины интервала взять следующие значения: а) $b=0{,}3$; б) $b=0{,}6$; в) $b=1{,}2$.

В задачах статистического анализа сложных систем, например при разработке систем автоматического проектирования (САПР), широко используется *метод моделирования выборки* из генеральной совокупности с заданным законом распределения.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения $F_X(x)$. Как известно из теории вероятностей (см. задачу 14.504), случайная величина $Y=F_X(X)$ имеет равномерное распределение $R(0, 1)$. Отсюда следует, что случайная величина X может быть получена из равномерно распределенной случайной величины Y по формуле $X=F_X^{-1}(Y)$, где F_X^{-1}—функция, обратная к F_X (заведомо существующая для случайных величин непрерывного типа).

Метод моделирования выборки из генеральной совокупности с законом распределения $F_X(x)$ реализуется следующим алгоритмом:

$$x_j=F_X^{-1}(y_j), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$—выборка из генеральной совокупности с равномерным распределением $R(0, 1)$, являющаяся последовательностью случайных чисел.

Алгоритм (2) получения выборки из генеральной совокупности с законом распределения $F_X(x)$ поясняется на рис. 144.

Случайные числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можно получить, выбрав случайным образом n чисел из таблицы П12 и разделив каждое выбранное число на 100. При наличии любого вычислительного устройства случайные числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$ генерируются с помощью формулы

$$y_{j+1}=\{my_j\}, \qquad j\in\mathrm{N}, \tag{3}$$

где $\{a\}$—дробная часть числа a, а m—простое число, большее десяти. В качестве начального значения y_1 в формуле (3) можно выбрать произвольное число из интервала (0, 1) с ненулевыми разрядами в десятичной системе счисления. От удачного выбора начального значения y_1 зависит качество последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

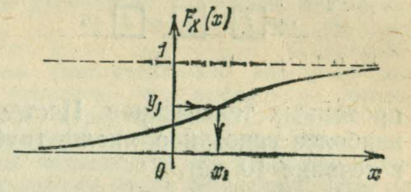

Рис. 144

15.12. Шкала вольтметра имеет цену делений 1 В. При измерении напряжения отсчет делается с точностью до ближайшего целого деления. Считая, что ошибка округления имеет равномерное распределение, получить методом моделирования выборку объемом $n=20$. Построить вариационный ряд и гистограмму частот полученной выборки.

15.13. Методом моделирования получить выборки объемом $n=10$ из генеральной совокупности с показательным законом распределения $\mathrm{Ex}(\lambda)$ с $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

15.14. Автомобили подъезжают к автозаправочной станции последовательно, причем время между прибытием двух автомобилей имеет показательное распределение с параметром $\lambda_1=1$. Если очереди нет, автомобиль заправляется сразу, в противном случае он становится в очередь. Время заправки автомобиля имеет показательное распределение с параметром $\lambda_2=2$. Используя выборки, полученные в задаче 15.13, составить таблицу, содержащую время подъезда для каждого из пяти последовательно прибывших автомобилей, время начала и конца заправки, продолжительность ожидания в очереди, общее время на ожидание и обслуживание.

15.15. Пусть t_i—время наработки на отказ i-го элемента схемы. Известно, что t_i распределено по закону $\mathrm{Ex}(\lambda_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$. Используя выборки, полученные в задаче 15.13, построить эмпирическую функцию распределения времени наработки на отказ для схемы на рис. 145.

15.16 (продолжение). В условиях предыдущей задачи построить функцию распределения времени наработки на отказ для схемы на рис. 146.

15.17. Время безотказной работы (в месяцах) телевизионной трубки имеет нормальное распределение $N(24, 3)$. Магазин продал 15 телевизоров. Методом моделирования получить выборку времени безотказной работы трубок у

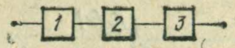

Рис. 145

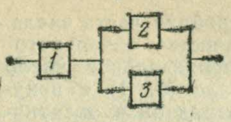

Рис. 146

проданных телевизоров. Построить гистограмму и оценить наиболее вероятное число трубок, потребующих замены в течение 10 лет.

Для получения выборки из генеральной совокупности, распределенной по закону $N(0, 1)$, можно воспользоваться алгоритмом, основанным на любом из следующих соотношений:

$$u_j = \sqrt{-2\ln y_{j-1}}\cos 2\pi y_j, \qquad (4)$$

$$j = 2, 3, \ldots, n,$$

$$v_j = \sqrt{-2\ln y_{j-1}}\sin 2\pi y_j, \qquad (5)$$

где, как и выше, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — выборка из генеральной совокупности с равномерным распределением $R(0, 1)$.

15.18. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальные распределения $N(10, 2)$ и $N(9, 1)$ соответственно. Используя соотношения (4) и (5), получить выборки объема $n = 20$ и оценить вероятность того, что $\min\{X, Y\} < 10$.

15.19. Пусть X и Y — независимые случайные величины, распределенные соответственно по законам $N(0, 1)$ и $N(0, 3)$. Используя соотношения (4) и (5), получить выборки объема $n = 50$ для X и Y.

15.20. Используя результат предыдущей задачи, получить выборку объема $n = 50$ для случайной величины $Z = |X| + |Y|$ и построить гистограмму частот.

15.21. Используя результат задачи **15.19**, получить выборку объема $n = 50$ для случайной величины $V = |X - Y|$ и построить гистограмму частот.

15.22. Пусть I — индикаторная случайная величина события $A = \{|X| < 1\}$, т. е.

$$I = \begin{cases} 1, & |X| < 1, \\ 0, & |X| \geq 1, \end{cases}$$

где X — случайная нормально распределенная величина из задачи 15.19. Используя выборку, полученную в этой задаче, найти частоту события $\{I = 1\}$ и сравнить полученный результат с точным значением вероятности этого события.

15.23.** Доказать теорему Гливенко.

2. Числовые характеристики выборочного распределения. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка объема n из генеральной совокупности с функцией распределения $F_X(x)$. Рассмотрим выборочное распределение, т. е. распределение дискретной случайной величины, принимающей значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями, равными $1/n$. Числовые характеристики этого выборочного распределения называются *выборочными* (*эмпирическими*) *числовыми характеристиками*. Следует отметить, что выборочные числовые характеристики являются характеристиками данной выборки, но не являются характеристиками распределения генеральной совокупности. Чтобы подчеркнуть это различие, выборочные характеристики в дальнейшем будем обозначать теми же символами, что и в главе 14, но со значком * наверху. Некоторые выборочные характеристики имеют традиционные обозначения, например, $\bar{x}$ — выборочное среднее.

Пример 4. Получить формулы, определяющие выборочные математическое ожидание и дисперсию для негруппированной выборки объема n.

◀ Математическое ожидание дискретной случайной величины определяется по формуле (см. главу 14, § 2, формулу (4))

$$m_X = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j.$$

Так как для выборочного распределения $p_j = 1/n$, то

$$m_X^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j. \qquad (1)$$

Аналогично

$$D_X^* = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 p_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 / n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - n\bar{x}^2\right). \ ▶ \qquad (2)$$

Выборочной модой d_X^* унимодального (одновершинного) распределения называется элемент выборки, встречающийся с наибольшей частотой.

Выборочной медианой называется число h_X^*, которое делит вариационный ряд на две части, содержащие равное число элементов. Если объем выборки n — нечетное число (т. е. $n = 2l + 1$), то $h_X^* = x^{(l+1)}$, то есть является элементом вариационного ряда со средним номером. Если же $n = 2l$, то $h_X^* = \frac{1}{2}(x^{(l)} + x^{(l+1)})$.

Пример 5. Определить среднее, моду и медиану для выборки 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4.

◀ Представим данные в виде вариационного ряда: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{8}(1+1+2+3+4+5+6+8) = 3{,}75$. Все элементы входят в выборку по одному разу, кроме 1, следовательно, мода $\tilde{d}_X = 1$. Так как $n = 8$, то медиана $\tilde{h}_X = \frac{1}{2}(3+4) = 3{,}5$. ▶

Вычислить моду, медиану, среднее и дисперсию следующих выборок:

15.24. 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3.

15.25. 3,1; 3,0; 1,5; 1,8; 2,5; 3,1; 2,4; 2,8; 1,3.

15.26. а) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 9; б) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 12. Сравнить полученные числовые результаты для выборок а) и б).

15.27. Доказать, что выборочные начальные и центральные моменты порядка s, $s = 1, 2, \ldots$, для негруппированной выборки объема n определяются следующими формулами:

$$\alpha_s^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^l, \qquad \mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \alpha_1^*)^l.$$

15.28. Доказать, что выборочные начальные и центральные моменты порядка s, $s = 1, 2, \ldots$, для группированной выборки объема n определяются следующими формулами:

$$\alpha_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^l, \qquad \mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (z_i - \alpha_1^*)^l.$$

15.29. Доказать, что для выборочной дисперсии справедлива следующая формула:

$$D_X^* = \alpha_2^* - \overline{x}^2.$$

15.30. Доказать справедливость следующих соотношений:

$$\mu_3^* = \alpha_3^* - 3\alpha_2^*\alpha_1^* + 2\alpha_1^{*3},$$
$$\mu_4^* = \alpha_4^* - 4\alpha_3^*\alpha_1^* + 6\alpha_2^*\alpha_1^{*2} - 3\alpha_1^{*4}.$$

В задачах 15.31—15.33 определить среднее, моду, медиану и дисперсию группированных выборок.

15.31.

Границы интервалов	1—3	3—5	5—7	7—9	9—11	11—13
Частоты	1	2	4	2	1	1

15.32.

Границы интервалов	0—4	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24
Частоты	1	1	3	2	1	1

15.33.

Границы интервалов	5—7	7—9	9—11	11—13	13—15	15—17
Частоты	8	14	40	26	6	4

15.34. Доказать следующие свойства выборочного среднего:

а) $\sum (x_i - \overline{x}) = 0$;

б)* $\sum (x_i - \overline{x})^2 < \sum (x_i - a)^2$, где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \overline{x}$.

15.35.** Доказать следующее свойство выборочной медианы:

$$\sum |x_i - h_X^*| < \sum |x_i - a|, \qquad \text{где} \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq h_X^*.$$

15.36. Предположим, что в результатах наблюдений случайной величины X присутствует одна и та же систематическая погрешность a. Какое влияние оказывает эта систематическая погрешность на величины выборочных среднего, моды, медианы и дисперсии?

15.37. Как изменятся выборочные среднее, мода, медиана и дисперсия, если результаты наблюдения подвергнуть преобразованию масштаба, т. е. увеличить или уменьшить одновременно в k раз?

Результаты задач 15.36 и 15.37 используются для упрощения вычислений выборочных среднего и дисперсии группированной выборки. Для этого группированную выборку преобразуют следующим образом:

$$u_i = \frac{1}{b}(z_i - d_X^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3}$$

где d_X^* — выборочная мода, а b — длина интервала группировки. Соотношения (3) показывают, что в выборку $z_1, z_2, \ldots, z_k$ внесена систематическая ошибка d_X^*, а результат подвергнут преобразованию масштаба с коэффициентом $k = 1/b$. Полученный в ре-