Термин «функция» был введен Лейбницем, но долго под ним подразумевались лишь функции, заданные каким-либо аналитическим выражением. Во времена Эйлера функции, заданные в различных частях интервала разными уравнениями, не считались «настоящими» функциями. Но уже в 1822 г. французский математик Фурье в своих исследованиях пользовался по существу самым общим понятием функции, хотя явно и не сформулировал этого понятия.

Современное определение числовой функции, в котором понятие функции освобождалось от способа ее задания, было дано независимо друг от друга русским математиком Н. И. Лобачевским в 1834 г. и немецким математиком Л. Дирихле в 1837 г. Основная идея этих определений заключалась в том, что в понятии функции не существенно, каким образом каждому x поставлено в соответствие определенное значение $f(x)$, важно только, чтобы это соответствие было установлено.

Современное же понятие функции с произвольной областью определения и произвольным множеством значений (не обязательно числовыми), современная терминология и обозначения сформировались по существу совсем недавно — в первой половине текущего столетия.

Наглядный смысл понятия предела функции был ясен математикам XVII в. Они умели фактически правильно находить пределы. Но строгие определения понятия предела последовательности и функции, сохранившиеся до наших дней, были даны лишь французским математиком Коши (1789—1857) и далеко не сразу были всеми поняты.

Яркие характеристики глубины переворота в математике, происшедшего в XVII в., дали Карл Маркс и Фридрих Энгельс. Энгельс писал: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика». Но начальный период развития новых ветвей математики, связанных с понятиями функции, бесконечно малых величин, пределов и производных был охарактеризован Марксом как «мистический».

Лозунгом многих математиков XVIII в. был: «Двигайтесь вперед, и вера в правильность результатов к вам придет».

Только после работ Коши в течение XIX в. начала математического анализа получили конкретное обоснование. Для этого, в частности, как вы можете понять после рассказанного в третьей главе, была необходима строгая теория действительных чисел. А она была развита только во второй половине XIX в. Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 15. Тригонометрические функции числового аргумента

91. Радианное измерение углов

Из курса математики восьмилетней школы известны различные единицы измерения углов: прямой угол d, градус, минута, секунда*:

$$d = 90^\circ,\ 1^\circ = 60',\ 1' = 60''.$$

$$1^\circ = \frac{1}{90}d,\ 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ,\ 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'.$$

В дальнейшем нам понадобится еще одна единица измерения углов — радиан.

Радианом называется угол в $\frac{180}{\pi}$ *градусов*

$$1\ рад = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Целесообразность введения такой единицы измерения углов объясняется очень просто: если величина центрального угла равна радиану, то длина дуги, на которую опирается этот угол, равна радиусу.

В самом деле, в окружности радиуса r центральный угол в 180° опирается на дугу длины πr, центральный угол в 1° опирается на

* Строго говоря, надо различать *угол* как геометрическую фигуру и *величину угла*. Два конгруэнтных угла

$$\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1$$

имеют одну и ту же величину

$$\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}.$$

Для краткости величину угла называют просто углом.

Теми же единицами измерения пользуются, говоря о повороте или вращении на то или иное положительное или отрицательное число градусов. По существу дело идет о системе угловых величин, применения которой довольно разнообразны. Например, в стереометрии вы научитесь выражать в градусах величину двугранных углов, величину углов между скрещивающимися прямыми и т. д. Вам хорошо знакомы из механики и смысл таких выражений, как вращение на 1200° или на -1200°.

8 Заказ 1079

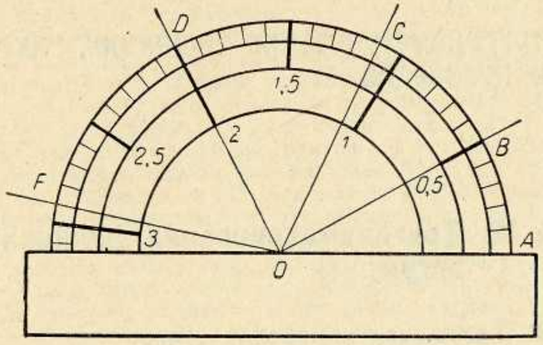

Рис. 110

дугу длины $\frac{\pi}{180}r$, а центральный угол в $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ — на дугу длины $\frac{180}{\pi}\left(\frac{\pi}{180}r\right) = r$.

С еще более существенным достоинством радианной меры углов мы встретимся в § 20 при вычислении производных тригонометрических функций.

Для практического измерения углов в радианной мере может служить специальный транспортир, на полуокружности которого отмечены радианы и их части (рис. 110). Разделив каждое деление транспортира на 10 равных частей, мы получим возможность измерять углы с точностью до 0,01 радиана и т. д.

На рисунке 110 радианные меры углов $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle AOF$ соответственно равны: 0,5; 1,1; 2; 2,9.

П р и м е р ы. Выразить в радианной мере углы в 45°, 36°, 135°, 250°, 330°.

Р е ш е н и е. $45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180}$ *рад* $= \frac{\pi}{4}$ *рад*;

$$36^\circ = 36 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{рад} = \frac{\pi}{5}\ \text{рад};$$

$$135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{рад} = \frac{3\pi}{4}\ \text{рад};$$

$$250^\circ = 250 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{рад} = \frac{25\pi}{18}\ \text{рад};$$

$$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{рад} = \frac{11\pi}{6}\ \text{рад}.$$

В практических расчетах часто приходится градусную меру углов переводить в радианную или наоборот. Чтобы облегчить эту работу, составлены специальные таблицы. Приведем фрагмент таблицы из сборника В. М. Брадиса.

85°	1,4835	4853	4870	4888	4905	4923	4940	4957	4975	4992	3 6 9
86°	1,5010	5027	5045	5062	5080	5097	5115	5132	5149	5167	3 6 9
87°	1,5184	5202	5219	5237	5254	5272	5289	5307	5324	5341	3 6 9
88°	1,5359	5376	5394	5411	5429	5446	5464	5481	5499	5516	3 6 9
89°	1,5533	5551	5568	5586	5603	5621	5638	5656	5673	5691	3 6 9
90°	1,5708										
	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	1 2 3

П р и м е р. Найти радианную меру угла в 86°38′.

Р е ш е н и е. В левом столбце таблицы отыскиваем 86°, затем перемещаемся по соответствующей строке до столбца таблицы, под которым (или над которым) написано число минут, ближайшее к 38, т. е. до столбца для 36′. На пересечении указанных строки и столбца находим радианную меру угла 86°36′, к которой надо еще прибавить поправку на недостающие 2′ (см. три последних столбца), и тем самым получаем:

$$\begin{array}{r} 86^\circ36' — 1{,}5115 \\ 2' — \quad\quad 6 \\ \hline \end{array}$$

О т в е т: $86^\circ38' \approx 1{,}5121$ *рад*.

Этими же таблицами можно пользоваться и при переходе от радианной меры к градусной. Например, требуется найти градусную меру угла $\alpha = 1{,}5248$ *рад*.

Р е ш е н и е. Ищем в таблице число, ближайшее к данной радианной мере, т. е.

$$\begin{array}{rr} 1{,}5254 — & 87^\circ24' \\ —6 — & —2' \\ \hline \end{array}$$

О т в е т: $1{,}5248$ *рад* $\approx 87^\circ22'$

Упражнения

632. Определить градусную и радианную меры углов прямоугольного равнобедренного треугольника, не пользуясь таблицами.

633. Определить градусную и радианную меры углов четырехугольника, если они относятся как 5 : 9 : 10 : 12 (без таблиц).

634. Определить градусную и радианную меры углов пятиугольника, если они относятся как 6 : 7 : 9 : 12 : 14 (без таблиц).

635. Найти угловую скорость диска, вращающегося со скоростью 300 *об/мин* (в радианах в секунду).

636. Вычислить угловую скорость часовой и минутной стрелок (в радианах в час).

637. Зубчатое колесо имеет 96 зубцов. Выразить в радианах угол поворота колеса, когда оно повернется против движения часовой стрелки на: 30 зубцов, 36 зубцов, 48 зубцов, 72 зубца, 300 зубцов, 750 зубцов, 984 зубца.

638. Хорда делит окружность в отношении 5 : 13. Определить величины опирающихся на эту хорду вписанных углов в радианной мере.

639. Определить внутренние углы пятиугольника, описанного около окружности, если точки касания его сторон делят окружность в отношении 5 : 7 : 10 : 12 : 14.

640. С помощью таблиц найти радианные меры углов: 15°, 50°36′, 137°, 237°, 142°57′, 273°37′, 315°39′, 345°28′.

641. С помощью таблиц найти градусные меры углов по данным их радианным мерам: 0,4853, 0,3756, 1,3246, 3,1416, 4,9681, 5,3842, 7,1567.

642. Окружность разделена на восемь конгруэнтных частей точками A, B, C, D, E, M, N, P. Найти радианные меры положительных дуг (т. е. дуг, измеряемых в направлении против движения часовой стрелки) $\smile AB$, $\smile AC$, $\smile AD$, $\smile AE$, $\smile AM$, $\smile AN$, $\smile AP$ и радианные меры отрицательных дуг $\smile AP$, $\smile AN$, $\smile AM$, $\smile AE$, $\smile AD$, $\smile AC$, $\smile AB$.

643. Окружность морского компаса делится на 32 конгруэнтные части, называемые румбами. Выразить один румб в градусной и радианной мерах.

644. Определить длину дуги окружности радиуса $R = 20$ *см*, если дуга содержит 36°.

645. Дуга окружности равна 20 *см*. Определить радианную и градусную меры этой дуги, если радиус окружности равен 52 *см*.

646. Выразить в радианах сумму внешних углов выпуклого шестиугольника.

92. Об одном замечательном отображении числовой прямой на окружность

На координатной плоскости рассмотрим окружность, определенную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Эту окружность будем называть *единичной окружностью* (ее радиус равен принятой в нашей системе координат единице измерения, а центр совпадает с началом координат). Представим себе, что подвижная точка P двигается по единичной окружности с единичной скоростью, т. е. проходит за единицу времени дугу единичной длины. Предположим, что эта подвижная точка, двигаясь против часовой стрелки, в начальный момент времени $t = 0$ занимает положение P_0, где P_0 — точка с координатами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Легко понять, что при соблюдении этих условий точка P в момент времени $t = -1$ занимала положение P_{-1}, а в момент времени $t = 1$ займет положение P_1 (рис. 111). На рисунках 112 и 113 отмечены положения точки P при некоторых $t > 0$ и $t < 0$.

Обозначим через P_t положение нашей подвижной точки в момент времени t. Мы описали на языке кинематики функцию или отображение

$$t \mapsto P_t, \qquad (1)$$

которое каждому действительному числу t ставит в соответствие точку единичной окружности. Таким образом, у нашей функции область определения есть множество всех действительных чисел.

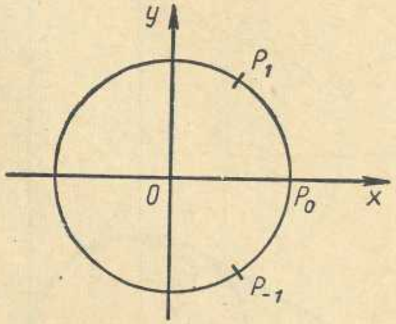

Рис. 111

Так как подвижная точка P пробегает все точки единичной окружности (попадая в каждую ее точку бесконечное множество раз), то множеством значений определенной нами функции является множество всех точек единичной окружности.

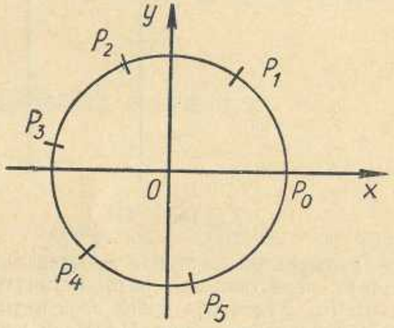

Рис. 112

Можно дать математическое определение отображения (1), не прибегая к языку кинематики.

1. При $t = 0$ точка P_0 определяется своими координатами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

2. Если $0 < t < 2\pi$, то положение точки P_t определяется тем, что

$$\widehat{P_0OP_t} = t \text{ рад}$$

и $\angle P_0OP_t$ отложен от луча OP_0 в направлении против вращения часовой стрелки.

3. За время $t = 2\pi$ точка P_t проходит полную окружность и возвращается на прежнее место. Поэтому при любом t имеем равенство:

$$P_{t+2\pi} = P_t.$$

Из 3 вытекает 3′.

3′. При любом t и любом целом n

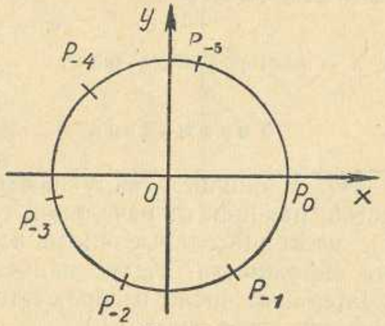

Рис. 113

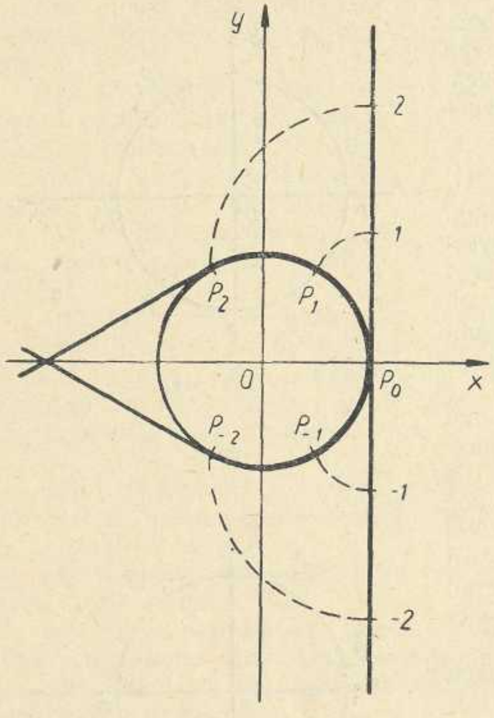

Рис. 114

$$P_{t+2\pi n} = P_t.$$

Условия 1—3 полностью определяют отображение (1). В самом деле, условия 1 и 2 определяют положение точки P_t при t, лежащих в пределах $0 \leqslant t < 2\pi$. Если t лежит за этими пределами, то его всегда можно представить в виде $t = 2\pi n + t'$, где n — целое число, а t' лежит в пределах $0 \leqslant t' < 2\pi$. Тогда по условию 3′, которое является следствием условия 3, получим:

$$P_t = P_{t'}.$$

Так как отображение (1) весьма существенно для дальнейшего, отметим еще одну возможность представить его наглядно.

На координатной плоскости вертикальная прямая с уравнением $x = 1$ является касательной в точке P_0 к единичной окружности. Представим себе бесконечную нерастяжимую нить, натянутую вдоль этой прямой и закрепленную в точке P_0. Будем оба конца этой нити «наматывать» на единичную окружность, как это показано на рис. 114. Ясно, что точка нити, которая в начальном положении (нить протянута вдоль прямой $x = 1$) имела ординату α, после наматывания попадет в точку P_α единичной окружности, а точки прямой, ординаты которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π, наложатся при наматывании на окружность на одну и ту же точку.

Таким образом, для того чтобы два действительных числа α и α' отображались в одну и ту же точку единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha' - \alpha = 2\pi n,$$

где n — некоторое целое число.

Упражнения

647. Единичная окружность разделена на 12 конгруэнтных частей, начиная от начальной точки A_0 (рис. 115). Какие наименьшие неотрицательные числа изображают полученные точки деления окружности? Какие наименьшие по абсолютной величине отрицательные числа изображают те же точки окружности? (Ответы выразить через число π.)

648. Отметить на единичной окружности все точки, соответствующие действительным числам вида $\frac{\pi}{6} n + \frac{\pi}{8}$, где n—любое целое число.

649. Найти радианные меры центральных углов, опирающихся на дуги в упражнении 647, считая началом дуг точку A_0, а их концами точки деления окружности (рис. 115).

650. Определить радианную меру дуги, описываемой концом минутной стрелки часов: а) за 5 *мин*; б) за 12 *мин*; в) за 2 *ч* 10 *мин*; г) за 2 *ч* 42 *мин*; д) за 3 *ч* 15 *мин*.

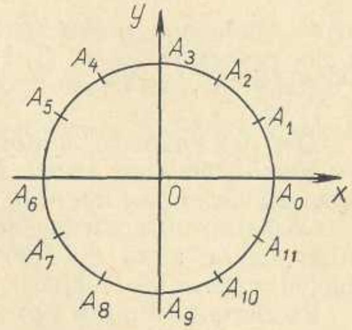

Рис. 115

651. Какую линейную скорость имеет точка вращающегося диска, удаленная на 18 *см* от оси вращения, если угловая скорость диска равна $\frac{\pi}{3}$ *рад/сек*? Какой длины дугу опишет эта точка за 45 *мин*?

93. Синус и косинус числового аргумента

В п. 92 мы определили отображение

$$t \mapsto P_t$$

числовой прямой $\mathbb{R}$ на единичную окружность. Обозначим через x_t и y_t соответственно абсциссу и ординату точки P_t (рис. 116). Получим два отображения

$$t \mapsto x_t,$$

$$t \mapsto y_t$$

числовой прямой $\mathbb{R}$ в себя (x_t и y_t — действительные числа!), т. е. две числовые функции. Эти функции имеют специальные названия *косинус* и *синус* и специальные обозначения cos и sin:

$$\cos t = x_t, \ \sin t = y_t.$$

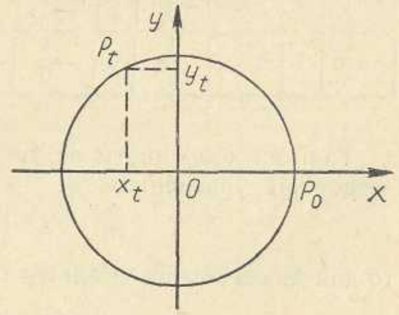

Рис. 116

Определение 1. ***Синусом действительного числа t называется ордината точки P_t единичной окружности, соответствующей числу t по правилу, описанному в п. 92.***

Очевидно, областью определения функции sin является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Так как ордината любой точки единичной окружности по модулю не превосходит единицы и для любого числа $y \in [-1;\ 1]$ на окружности существуют точки с ординатой y, то множество значений функции синус есть отрезок $[-1;\ 1]$.

Определение 2. ***Косинусом действительного числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности, соответствующей числу t по правилу п. 92.***

Областью определения косинуса является множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Множеством значений этой функции является отрезок $[-1;\ 1]$.

Рассмотрим пример: единичная окружность (рис. 115) разделена на 12 конгруэнтных частей точками $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$, начиная от точки A_0 с координатами $(1,\ 0)$, в положительном направлении. Составить таблицу значений синуса и косинуса наименьших неотрицательных чисел, изображаемых этими точками.

Решение. На рисунке 115 точки деления изображают соответственно числа (см. упр. 647):

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6},\ \pi,\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{11\pi}{6}.$$

Ординаты этих точек равны соответственно:

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}.$$

Абсциссы тех же точек равны соответственно:

$$1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тем самым получаем таблицу искомых значений:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Так как координаты любой точки единичной окружности удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

то для любого действительного числа α имеет место равенство

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}. \tag{2}$$

Упражнения

652. Проверить справедливость равенства (2) по приведенной выше таблице.

653. Найдется ли такое значение аргумента α, для которого:

а) $\sin\alpha = \frac{21}{29},\quad \cos\alpha = \frac{20}{29}$;

б) $\sin\alpha = -\frac{12}{37},\quad \cos\alpha = \frac{35}{37}$;

в) $\sin\alpha = \frac{1}{3},\quad \cos\alpha = \frac{2}{5}$?

Упростить следующие выражения с помощью равенства (2):

654. $\sin^2\alpha - 1$.

655. $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

656. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

657. $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

658. $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

659. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

660. $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

661. $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

662. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$.

663. $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

94. Графики синуса и косинуса

Чтобы начертить приближенный график синуса, строим систему координат и единичную окружность с центром O_1 на оси Ox (рис. 117). На оси абсцисс откладываем отрезок OP, длина которого равна длине 2π *см* $\approx 6{,}28$ *см* окружности. Далее делим этот отрезок на конгруэнтные части, например на 16 конгруэнтных ча-

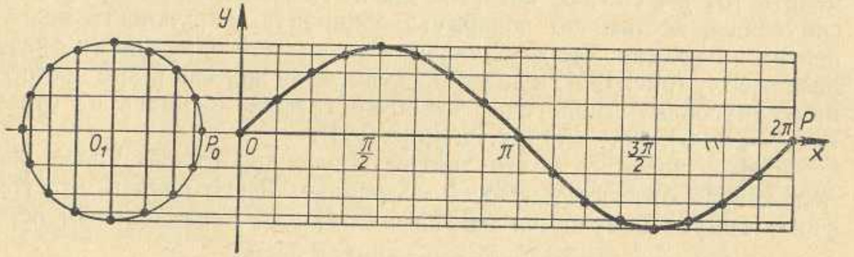

Рис. 117

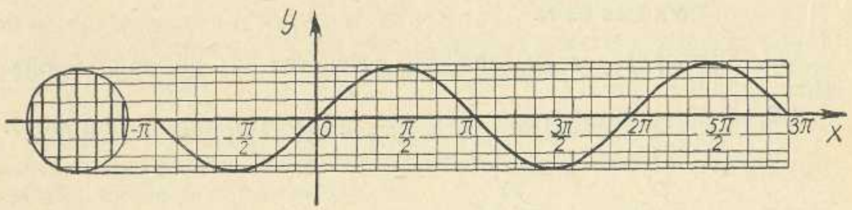

Рис. 118

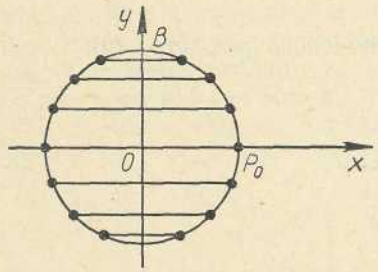

Рис. 119

стей. На столько же конгруэнтных частей делим, начиная от точки P_0, единичную окружность. Точки деления окружности будут иметь ординаты, равные значениям синуса в соответствующих точках деления отрезка OP оси Ox. Если через точки деления единичной окружности проведем прямые, параллельные оси Ox, то точки искомого графика как раз и расположатся соответственно на этих прямых. Соединив полученные точки графика плавной кривой, получим часть искомого графика на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

Для более точного построения графика синуса надо единичную окружность делить на большее число конгруэнтных частей. Можно уточнить отыскание точек графика с помощью таблицы значений синуса числового аргумента (В. М. Брадис, табл. XII).

Аналогично строится график синуса на отрезках $[-2\pi;\ 0]$, $[2\pi;\ 4\pi]$, $[4\pi;\ 6\pi]$ и т. д. (рис. 118).

График синуса есть кривая, называемая *синусоидой.*

Аналогично строится и график косинуса. Различие будет состоять только в том, что отрезки, длины которых равны значениям косинуса соответствующих действительных чисел, будут расположены на прямых, параллельных оси Ox (рис. 119). Чтобы применить тот же способ, которым мы пользовались при построении синусоиды, достаточно повернуть единичную окружность вокруг центра на 90° так, чтобы начальная точка этой окружности оказалась вверху (рис. 120), и далее поступать так же, как и при построении синусоиды. Аналогично строится график косинуса на отрезках $[-2\pi;\ 0]$, $[2\pi;\ 4\pi]$ и т. д. (рис. 121).

График косинуса — это также синусоида, только иначе расположенная относительно осей координат. Легко понять, что график косинуса получается из графика синуса параллельным переносом вдоль оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{2}$ влево.

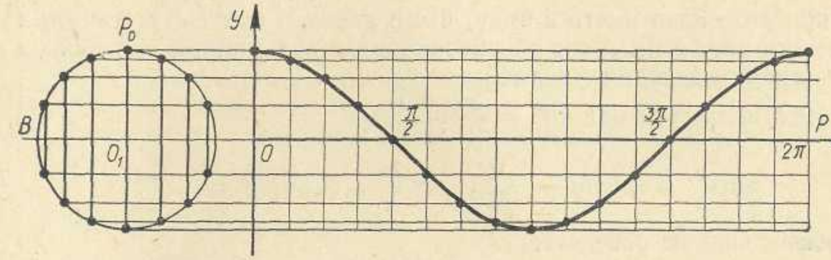

Рис. 120

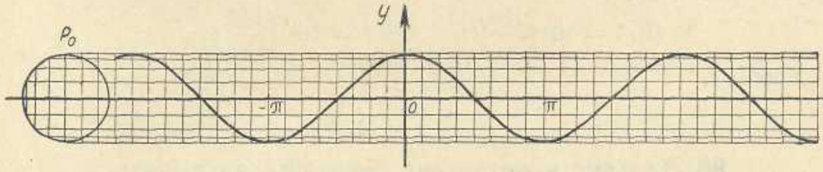

Рис. 121

95. Связь между определениями тригонометрических функций в восьмом и девятом классах

В курсе геометрии восьмого класса уже рассматривались функции синус и косинус, но там это были функции углового, а не числового аргумента. Логически это разные функции: область определения функций синус и косинус углового аргумента состоит из углов (точнее из величин углов), а для одноименных функций числового аргумента областью определения является множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Но между теми и другими функциями существует очень простая связь.

В восьмом классе мы познакомились с понятием поворота на любое число градусов. Повороты против часовой стрелки считались положительными, а по часовой стрелке — отрицательными. Поворот на 360° оказался совпадающим с поворотом на 0°, т. е. с тождественным отображением. На координатной плоскости через P_α обозначалась точка

$$P_\alpha = R^\alpha(P_0),$$

получающаяся из точки P_0 с координатами (1, 0) при повороте на угол α. Ясно, что при $\alpha = t$ *рад* точка P_α есть не что иное, как точка P_t из п. 92. Ее абсцисса и ордината были соответственно названы косинусом и синусом угла α, а в п. 92 мы назвали их соответственно косинусом и синусом числа t. Значит, ***синус и косинус угла в t радиан равны соответственно синусу и косинусу числа t.***

Можно написать

$$\sin(t\ \textit{рад}) = \sin t,\ \ \cos(t\ \textit{рад}) = \cos t,$$

но при этом надо иметь в виду, что в левых и правых частях этих равенств знаки sin и cos обозначают разные функции, так как их области определения различны.

Например, так как $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ *рад*, то

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

В общем виде из равенства

$$t \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}t\right)^\circ$$

следуют равенства

$$\sin t = \sin\left(\frac{180}{\pi}t\right)^\circ, \quad \cos t = \cos\left(\frac{180}{\pi}t\right)^\circ$$

при любом t.

96. Тангенс и котангенс числового аргумента

Определение 3. ***Тангенсом действительного числа α называется отношение синуса этого числа к его косинусу, т. е.***

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{1}$$

Определение 4. ***Котангенсом действительного числа α называется отношение косинуса этого числа к его синусу, т. е.***

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{2}$$

Из этих определений следует, что область определения тангенса состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида $\pi n + \frac{\pi}{2}$ при любом целом n; область определения котангенса состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида πn при любом целом n.

Перемножая равенства (1) и (2) почленно, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \tag{3}$$

Последнее равенство имеет место только для тех значений α, для которых и тангенс и котангенс существуют, т. е. для всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2}n$, где n — целое число.

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются тригонометрическими функциями. Иногда рассматривают еще две тригонометрические функции — секанс и косеканс, которые определяются следующим образом:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Упражнения

664. Найти области определения секанса и косеканса.

665. Дополнить таблицу предыдущего пункта значениями тангенса, котангенса, секанса и косеканса тех же чисел.

Упростить следующие выражения с помощью формул (1) — (5):

666. $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha$.

667. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$.

668. $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.

669. $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

670. $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$.

671. $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

672. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. 673. $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Доказать следующие тождества:

674. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

675. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

676. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

677. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = 1$.

678. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

679. $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

680. $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{1 - 2\sin^2\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha - 1}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

681. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

682. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$.

683. $\dfrac{1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

684. $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

97. Таблицы тригонометрических функций числового аргумента

В четырехзначных математических таблицах В. М. Брадиса имеются таблицы VII, VIII, IX, X для определения значений тригонометрических функций углов, выраженных в градусной мере. Там же имеется таблица XII, отрывок из которой приводится ниже.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1,20	0,9320	0,3624	2,572	1,60	0,9996	—0,0292	—34,233	2,00	0,9093	—0,4161	—2,1850
1,21	9356	3530	650	1,61	9992	0392	—25,495	2,01	9051	4252	1285
1,22	9391	3436	733	1,62	9988	0492	—20,307	2,02	9008	4342	0744
1,23	9425	3342	820	1,63	9982	0592	—16,871	2,03	8964	4432	0224
1,24	9458	3248	912	1,64	9976	0691	—14,427	2,04	8919	4522	—1,9725
1,25	9490	3153	3,010	1,65	9969	0791	—12,599	2,05	8874	4611	9246

По этой таблице определяются значения синуса, косинуса и тангенса числового аргумента. Например, $\sin 2{,}04 = 0{,}8919$, $\cos 2{,}04 = -0{,}4522$, $\operatorname{tg} 2{,}04 = -1{,}9725$.

Упражнения

685. С помощью таблицы XII найти значения синуса, косинуса и тангенса чисел: 0,03; 0,30; 0,37; 1; 1,43; 2; 2,15; 3; 3,07.

98. Тригонометрические функции и координаты вектора

Тригонометрические функции позволяют дать простое выражение зависимостям между длиной вектора, его углом с осью абсцисс и его координатами. Чтобы разобраться в этом вопросе, надо вспомнить основные сведения о векторах и их координатах. Заметим, что на координатной плоскости уже выбрана определенная единица измерения расстояний и длин отрезков. Поэтому удобно числовое значение длины отрезка называть просто его длиной. Таким образом, далее у нас длина отрезка $[AB]$ есть просто *число*.

Мы знаем, что ненулевой вектор полностью определяется своим направлением и своей длиной. Векторы удобно изображать отрезками (рис. 122). Выбрав любую точку O и отложив от нее по характеризующему вектор $\vec{a}$ направлению отрезок $[OA]$ длины $|\vec{a}|$, получим изображение вектора $\vec{a}$. Начальную точку O можно выбрать произвольно. На рисунке 123 отрезки $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ являются изображениями одного и того же вектора. На координатной плоскости векторы удобно изображать отрезками, исходящими из начала координат O. Равенство

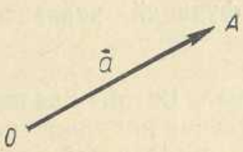

Рис. 122

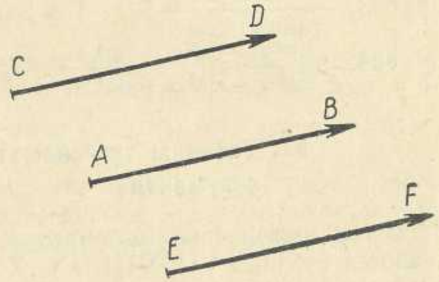

Рис. 123

$$\vec{a} = \vec{OA}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами и точками A координатной плоскости (при $A = O$ получается нулевой вектор). Координаты точки A называются *координатами вектора* $\vec{a}$ и обозначаются через x_a и y_a (рис. 124).

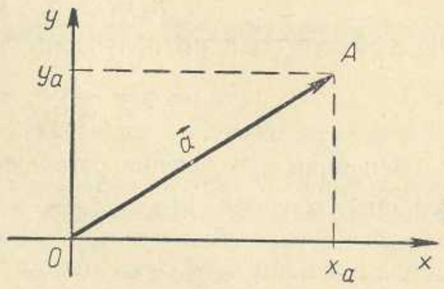

Рис. 124

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором или *ортом*.

Единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, называется *ортом вектора* $\vec{a}$. Если обозначить орт вектора $\vec{a}$ через $\vec{e}$, то (рис. 125)

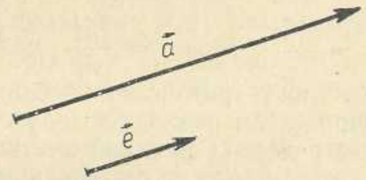

Рис. 125

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}.$$

Обычно орты координатных осей обозначают буквами $\vec{i}$ и $\vec{j}$. В геометрии установлена основная формула, связывающая вектор $\vec{a}$ с его координатами x_a, y_a (рис. 126):

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}.$$

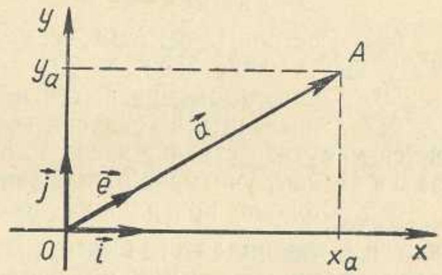

Рис. 126

Если

$$\vec{e} = x_e\vec{i} + y_e\vec{j}$$

орт вектора $\vec{a}$, то

$$x_a = |\vec{a}| \cdot x_e, \quad y_a = |\vec{a}| \cdot y_e. \tag{1}$$

Пусть теперь вектор $\vec{a}$ и его орт $\vec{e}$ образуют с положительным направлением оси Ox угол α. Под углом α мы понимаем угол, на который надо повернуть ось Ox вокруг точки O, чтобы совместить ее с лучом OA.

Из определений п. 93 непосредственно вытекает, что координаты x_e и y_e орта $\vec{e}$ равны соответственно косинусу и синусу угла α, т. е.

$$x_e = \cos\alpha, \quad y_e = \sin\alpha. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}, \quad \sin\alpha = \frac{y_a}{|\vec{a}|}. \qquad (3)$$

Вспомнив определения остальных четырех тригонометрических функций, получим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_a}{x_a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x_a}{y_a}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{|\vec{a}|}{x_a}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{a}|}{y_a}$.

Равенства $\sin\alpha = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$, $\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_a}{x_a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_a}{y_a}$, $\sec\alpha = \frac{|\vec{a}|}{x_a}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{|\vec{a}|}{y_a}$ можно было бы принять в качестве определений тригонометрических функций. Иногда так и делается. При таком подходе к делу становится понятным, почему тригонометрических функций шесть: это все шесть попарных отношений, которые можно составить для трех чисел:

$$x_a, \; y_a, \; |\vec{a}|.$$

Упражнения

686. Построить векторы, образующие с осью Ox углы: 60°, 250°, 290°, 1080°, 3850°, —70°, —140°, —190°, —250°, —1040°, —2560°, воспользовавшись, где надо, транспортиром.

687. Определить в градусах величину угла, на который повернется минутная стрелка часов за 5 *мин*, за 18 *мин*, за 2 *ч* 15 *мин*, за 6 *ч* 48 *мин*, учитывая направление поворота стрелки.

688. Сторона правильного шестиугольника AB расположена на оси $\vec{l}$, вершины этого шестиугольника $ABCDEF$ обозначены буквами, расположенными по порядку против движения часовой стрелки. Определить углы, образованные векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EA}$ с осью $\vec{l}$, направление которой совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{AB}$.

689. Ведро в колодце поднимается на 2 *м*, если рукоятку ворота повернуть на 5 полных оборотов по ходу движения часовой стрелки. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро опустилось на 1,25 *м*?

690. Два зацепляющихся зубчатых колеса имеют: одно — 36 зубцов, другое — 48 зубцов. Меньшее колесо сделало три полных оборота по ходу движения часовой стрелки. На сколько градусов повернется при этом большее колесо?

691. Угловая скорость колес движущегося автомобиля 40 *рад/сек*. В какое время он пройдет с такой скоростью участок шоссе в 18 *км*? Радиус колеса автомобиля 0,5 *м*.

§ 16. Основные свойства тригонометрических функций

99. Знаки значений тригонометрических функций

Оси координат Ox, Oy прямоугольной системы координат делят всю координатную плоскость на четыре части, называемые *четвертями* или *квадрантами*. Эти четверти нумеруются против движения часовой стрелки, как показано на рисунке 127. Единичная окружность с центром в начале координат тоже делится на четыре четверти, которые нумеруются так же, как и четверти плоскости.

Любой вектор, выходящий из начала координат, или расположен на какой-либо оси системы координат xOy, или находится в какой-нибудь четверти. Так, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ находятся соответственно в I, II, III и IV четвертях координатной плоскости. Далее будем говорить, что указанные векторы образуют с положительным направлением оси Ox углы соответственно I, II, III и IV четвертей.

Точно так же говорят и о числах. Если число α изображается точкой II четверти единичной окружности, то будем говорить, что *число α находится во второй четверти*. Так, числа 1,5; 2,7; 3,4; 6,7 находятся соответственно в I, II, III и IV четвертях.

После этих соглашений легко определяются знаки значений любой тригонометрической функции для любого значения ее аргумента (числового, дугового и углового).

Ординаты точек (векторов) I и II четвертей положительны, а III и IV четвертей отрицательны. Поэтому синусы чисел (углов) I и II четвертей положительны, а для III и IV четвертей они отрицательны.

Абсциссы точек (векторов), находящихся в I и IV четвертях, положительны, а для остальных четвертей они отрицательны.

Так как знак значения синуса совпадает со знаком ординаты точки единичной окружности, а знак значения косинуса совпадает со знаком абсциссы этой точки, то знаки значений этих функций можно представить наглядно, как это сделано на рисунке 128.

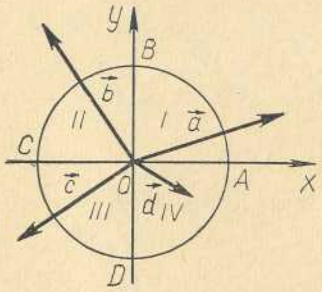

Рис. 127

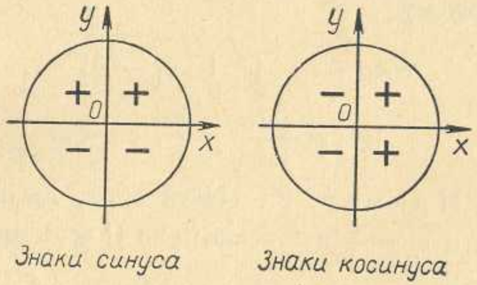

Рис. 128

Там, где синус и косинус имеют одинаковые знаки, т. е. в I и III четвертях, тангенс и котангенс положительны. Там, где знаки синуса и косинуса различны, т. е. во II и IV четвертях, тангенс и котангенс отрицательны.

Примеры. 1) Угол 350° находится в IV четверти, поэтому $\sin 350° < 0$, $\cos 350° > 0$, $\operatorname{tg} 350° < 0$, $\operatorname{ctg} 350° < 0$.

2) Угол —160° находится в III четверти, поэтому $\sin(-160°) < 0$, $\cos(-350°) < 0$, $\operatorname{tg}(-350°) > 0$, $\operatorname{ctg}(-350°) > 0$.

3) Число 2,5 находится во II четверти, поэтому $\sin 2{,}5 > 0$, $\cos 2{,}5 < 0$, $\operatorname{tg} 2{,}5 < 0$, $\operatorname{ctg} 2{,}5 < 0$.

4) Число (—2,5) находится в III четверти, поэтому $\sin(-2{,}5) < 0$, $\cos(-2{,}5) < 0$, $\operatorname{tg}(-2{,}5) > 0$, $\operatorname{ctg}(-2{,}5) > 0$.

Упражнения

692. Определить знаки значений всех тригонометрических функций следующих углов и чисел: 1) 143°; 2) —243°; 3) 735°; 4) —735°; 5) 0,35; 6) —0,5; 7) 5,6; 8) —3,5; 9) 7,3; 10) —7,3.

693. Определить знаки следующих выражений:

1) $\sin 300° \cdot \cos 200°$; 2) $\sin 193° \cdot \operatorname{tg} 202°$;
3) $\cos 247° \cdot \sin 112°$; 4) $\operatorname{tg} 147° \cdot \operatorname{ctg} 293°$;
5) $\cos 40° \cdot \sin 120° \cdot \operatorname{tg} 150°$; 6) $\operatorname{tg} 97° \cdot \operatorname{ctg} 197° \cdot \cos 297°$;
7) $\sin 1000° \cdot \cos 840° \cdot \operatorname{tg} 375°$; 8) $\sin 3 \cdot \cos 5$;
9) $\cos 8 \cdot \cos 5 \cdot \operatorname{tg} 1$; 10) $\operatorname{tg} 5 \cdot \operatorname{ctg} 3 \cdot \sin 2$;
11) $\sin(-5) \cdot \cos(-3) \cdot \operatorname{tg}(-2) \cdot \operatorname{ctg} 2$.

Рассмотрим следующие примеры:

Пример 1. Пусть требуется найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из равенства $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ получаем новое равенство $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, справедливое при любом значении α. Знак в последнем равенстве выбирается в зависимости от четверти, в которой находится α. В данном примере число α находится в III четверти, поэтому получаем $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{13^2-12^2}{13^2}} = -\frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5}{12}.$$

Пример 2. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и α — число во II четверти.

Решение. Так как $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{3}{4}$.

Для отыскания $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно воспользоваться следующими соображениями:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-3}{4} = \frac{-3t}{4t},$$

где t — любое, отличное от нуля число. Выбрав значение t так, чтобы выполнялось равенство

$$(-3t)^2 + (4t)^2 = 1, \tag{1}$$

будем иметь:

$$\sin\alpha = -3t, \quad \cos\alpha = 4t.$$

Из равенства (1) получаем: $25t^2 = 1$, $t = \pm\frac{1}{5}$. Но для II четверти имеем $\sin\alpha > 0$, т. е. $t = -\frac{1}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Упражнения

В следующих задачах по данному значению одной из тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и четверти, в которой находится α, найти значения остальных трех функций:

694. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

695. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

696. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{40}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

697. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

698. $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

699. $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

700. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{35}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

701. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{13}{84}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

702. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

703. $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

100. Четные и нечетные тригонометрические функции

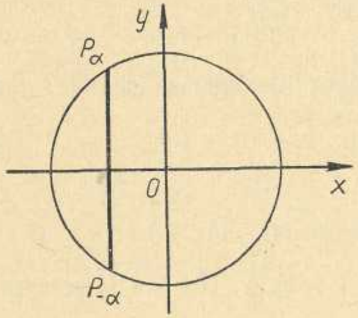

Рис. 129

Определение 1. ***Функция f называется четной, если вместе с каждым значением аргумента x из области определения f значение $-x$ также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство***

$$f(-x) = f(x),$$

т. е. для любых противоположных значений аргумента x из области определения f значения функции f равны.

Например, функция, определяемая уравнением $y = x^2$, четная, так как $(-x)^2 = x^2$.

Определение 2. ***Функция f называется нечетной, если вместе с каждым значением аргумента x из области определения f значение $-x$ также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство***

$$f(-x) = -f(x),$$

т. е. для любых противоположных значений аргумента x из области определения f значения функции f противоположны.

Теорема. ***Косинус — четная функция, а синус, тангенс и котангенс — нечетные функции.***

Доказательство. Любые два противоположных действительных числа α и $-\alpha$ изображаются на единичной окружности двумя точками P_α и $P_{-\alpha}$, симметричными относительно оси абсцисс (рис. 129). Так как точки P_α и $P_{-\alpha}$ лежат на единичной окружности с центром в начале координат O, то координатами точки P_α будут числа $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, координатами точки $P_{-\alpha}$ будут числа $\cos(-\alpha)$ и $\sin(-\alpha)$. Из того, что точки P_α и $P_{-\alpha}$ симметричны относительно оси абсцисс, следует, что их абсциссы совпадают, а их ординаты противоположны. Поэтому при любом α справедливы равенства

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \text{ и } \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Для тангенса и котангенса имеем:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Упражнения

704. Доказать, что если число α входит в область определения тангенса, то и $-\alpha$ входит в эту же область; если же одно из этих чисел не входит в область определения тангенса, то и другое не входит. Доказать то же самое и для котангенса.

705. Доказать, что секанс — четная функция, а косеканс — нечетная.

706. Установить, какие из функций, определяемых нижеследующими выражениями, являются четными, какие — нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $1-\cos x$; б) $x-\sin x$; в) $x^2-\cos x$;
г) $x^3+\sin x$; д) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; е) $\frac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}x-1}$;
ж) $\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; з) $\frac{x^2+\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$; и) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$;
к) $\cos x\sin x$; л) $\operatorname{tg}x\sin^2 x$; м) $\sin x\operatorname{ctg}^2 x$.

101. Периодичность тригонометрических функций

Определение. ***Функция f называется периодической, если для нее существует такое число $l \neq 0$, что при любом значении аргумента x числа $x-l$ и $x+l$ принадлежат области определения f и выполняются равенства***

$$f(x-l) = f(x) = f(x+l).$$

В этом случае число l называется периодом функции f.

Если число l является периодом функции f, то ее периодами, как легко видеть, будут также числа nl при любом целом $n \neq 0$.

Теорема. ***Все тригонометрические функции являются периодическими.***

Доказательство. Произвольное действительное число теперь будем обозначать буквой x вместо буквы α, а для осей системы координат примем, например, обозначения Ou и Ov. Два числа x и $x+2\pi$ изображаются одной и той же точкой единичной окружности (рис. 130), поэтому если число x принадлежит области определения какой-либо тригонометрической функции, то и число $x+2\pi$ также принадлежит области определения этой функции и для него выполняются равенства:

$$\sin(x+2\pi) = \sin x;$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x+2\pi) = \operatorname{tg}x;$$
$$\operatorname{ctg}(x+2\pi) = \operatorname{ctg}x.$$

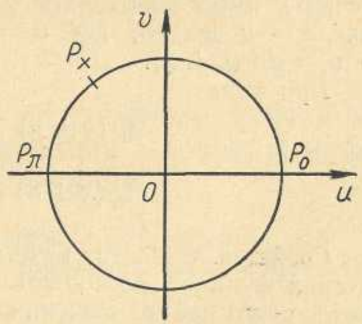

Рис. 130

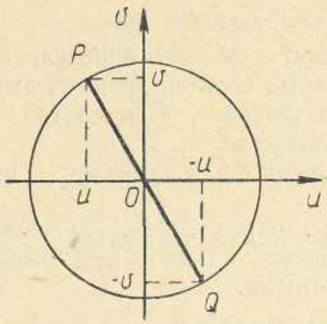

Рис. 131

Таким образом, число 2π является периодом указанных функций.

Особенно важно знать наименьший положительный период функции. Если l_0 — наименьший положительный период функции f, то все ее периоды заключены в формуле

$$l = nl_0,$$

где n — любое целое число. Говоря о периоде данной функции, чаще всего имеют в виду ее наименьший положительный период.

Докажем, что *наименьший положительный период синуса равен* 2π. Из равенства $\sin(x + l) = \sin x$ при $x = 0$ получаем $\sin l = 0$. На единичной окружности (рис. 130) только две точки имеют ординату, равную нулю, точки P_0 и P_π. Наименьшие положительные числа, изображаемые этими точками, соответственно равны 2π и π. Из этих чисел число π явно не подходит в качестве периода, так как $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, а $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. Следовательно, наименьшим положительным периодом может быть только 2π, что и подтверждается равенством $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ для любого x.

Наименьший положительный период косинуса тоже *равен* 2π. В самом деле, из равенства $\cos(x + l) = \cos x$ при $x = 0$ следует равенство $\cos l = \cos 0 = 1$. Наименьшее положительное число l, для которого $\cos l = 1$, равно 2π.

Для функций тангенса и котангенса наименьшим положительным периодом является число π.

Доказательство. При любом значении x числа x и $x \pm \pi$ изображаются точками P и Q единичной окружности, симметричными относительно начала координат O (рис. 131), и поэтому соответственные координаты этих точек противоположны. Если точка P имеет координаты u и v, то координатами точки Q будут числа $-u$ и $-v$, где $u = \cos x$, $v = \sin x$, $-u = \cos(x \pm \pi)$, $-v = \sin(x \pm \pi)$.

При этом

$$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \frac{-v}{-u} = \frac{v}{u} = \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm \pi) = \frac{-u}{-v} = \frac{u}{v} = \operatorname{ctg} x.$$

Свойства четности, нечетности и периодичности тригонометрических функций позволяют упрощать вычисления. Пусть, например, надо найти значения тригонометрических функций числа (угла, дуги) $\frac{17\pi}{3}$, т. е. надо найти

$$\sin\frac{17\pi}{3},\ \cos\frac{17\pi}{3},\ \operatorname{tg}\frac{17\pi}{3},\ \operatorname{ctg}\frac{17\pi}{3}.$$

Решение. $\sin\frac{17\pi}{3} = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos\frac{17\pi}{3} = \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

При решении первых двух примеров был выделен период синуса и косинуса, т. е. число $3 \cdot 2\pi = 6\pi$. При решении последних примеров выделен период тангенса и котангенса, т. е. число, кратное числу π.

Если угол задан в градусной мере, то периодами синуса и косинуса будут $360°$ и любое целое кратное $360°\ n$. Для тангенса и котангенса соответственно $180°$ и $180°\ n$.

Примеры. 1) $\sin(-1125°) = -\sin 1125° = -\sin(360° \cdot 3 + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(-1125°) = \cos 1125° = \cos(360° \times 3 + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}(-1125°) = -\operatorname{tg} 1125° = \operatorname{tg}(180° \cdot 6 + 45°) = -\operatorname{tg} 45° = 1$.

Упражнения

Значения нижеследующих функций свести к значениям тригонометрических функций с наименьшим возможным положительным значением аргумента, применяя прибавление или вычитание чисел, кратных периоду:

707. $\sin 485°$.	**708.** $\cos 1025°$.	**709.** $\operatorname{tg} 869°$.
710. $\operatorname{ctg} 1743°$.	**711.** $\sin(-875°)$.	**712.** $\cos(-1694°)$.
713. $\operatorname{tg}(-1759°)$.	**714.** $\operatorname{ctg}(-3953°)$.	**715.** $\cos 3976°$.
716. $\cos(-2305°)$.	**717.** $\operatorname{tg} 5729°$.	**718.** $\operatorname{ctg} 1875°$.
719. $\sin(-5108°)$.	**720.** $\cos(-815°)$.	**721.** $\sin(-4187°)$.

§ 17. Построение угла по данному значению тригонометрической функции и простейшие тригонометрические уравнения

102. Построение угла по данному значению его синуса и решение уравнения $\sin x = a$

Задача 1. Построить угол, синус которого равен a, и решить уравнение $\sin x = a$.

Решение. На единичной окружности (рис. 132) ищем точки,

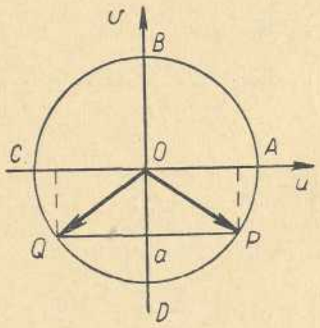

Рис. 132

ординаты которых равны a. При этом могут встретиться несколько различных случаев в зависимости от значений a.

а) Если $|a| > 1$, то на единичной окружности нет точек с ординатами a. В этом случае задача на построение не имеет решений. Следовательно, и уравнение $\sin x = a$ при $|a| > 1$ не имеет решений.

б) Пусть $a = 1$. На единичной окружности (рис. 132) имеется только одна точка B с такой ординатой. Вектор $\overrightarrow{OB}$ образует с осью абсцисс наименьший положительный угол $\frac{\pi}{2}$ в радианной мере или 90° в градусной мере.

Точка B изображает все числа (углы, дуги) вида $2\pi n + \frac{\pi}{2}$ ($360° n + 90°$), где n — целое число, поэтому решениями уравнения $\sin x = 1$ будут $x = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ ($x = 360°n + 90°$) при любом целом значении n.

в) Пусть $a = -1$. На единичной окружности (рис. 132) имеется только одна точка D с такой ординатой. Вектор $\overrightarrow{OD}$ образует с осью абсцисс наименьший положительный угол $\frac{3\pi}{2}$, или 270°. Можно взять наименьший по абсолютной величине отрицательный угол $-\frac{\pi}{2}$, или $-90°$.

Точка D изображает все числа (углы) вида $x = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$ ($360°n + 270°$), или, что то же самое, $x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$ ($360°n - 90°$), поэтому решения уравнения $\sin x = -1$ можно записать

$$x = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}, \text{ или } x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$$

($x = 360°n + 270°$, или $x = 360°n - 90°$ в градусной мере), где n — любое целое число.

г) Пусть $|a| < 1$. На единичной окружности имеются две точки, ординаты которых равны a (рис. 132). Это точки P и Q. Векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ с осью абсцисс образуют углы $\angle AOP$ и $\angle AOQ$. Это и будут искомые углы.

Если точка P изображает число α, то число $\pi - \alpha$ изображается точкой Q (учащимся предлагается убедиться в этом при различных возможных значениях a).

Так как точка P изображает все числа вида $2\pi n + \alpha$, а точка Q — все числа вида $2\pi n + \pi - \alpha$, то решениями уравнения $\sin x = a$ при $|a| < 1$ будут две серии чисел $x = 2\pi n + \alpha$ и $x = (2n + 1)\pi - \alpha$, где n — любое целое число.
Иногда оба этих ответа объединяют в один

$$x = \pi n + (-1)^n \alpha,$$

но это совсем не обязательно делать. Установить, что последняя формула заменяет два предыдущих равенства, учащимся предлагается самостоятельно.

103. Построение угла по данному значению его косинуса и решение уравнения $\cos x = a$

Задача 2. Построить угол, косинус которого равен a, и решить уравнение $\cos x = a$.

Решение. Строим единичную окружность так же, как это сделано в задаче 1 (рис. 133), и ищем на этой окружности точки, абсциссы которых равны a.

а) Если $|a| > 1$, то на единичной окружности нет точек с абсциссами a. В этом случае задача не имеет решений и, следовательно, уравнение $\cos x = a$ не имеет решений.

б) Пусть $a = 1$. На единичной окружности имеется только одна точка A с такой абсциссой. Вектор $\overrightarrow{OA}$ образует с осью абсцисс искомые углы. Решениями уравнения $\cos x = 1$ будут все числа вида $x = 2\pi n$, где n — любое целое число.

в) Пусть $a = -1$. На единичной окружности имеется только одна точка C с такой абсциссой. Вектор $\overrightarrow{OC}$ с осью абсцисс образует искомые углы.

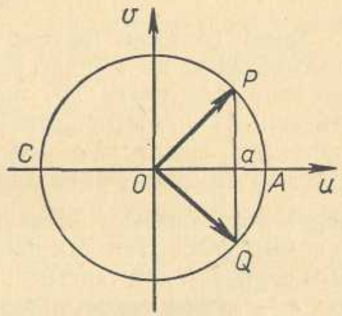

Рис. 133

Решениями уравнения $\cos x = -1$ будут все числа вида $x = 2\pi n + \pi$, где n — любое целое число.

г) Пусть $|a| < 1$. На единичной окружности имеются две точки P и Q с данной абсциссой a (рис. 133). Точки P и Q симметричны относительно оси абсцисс. Векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ с осью абсцисс образуют искомые углы.

Если точка P изображает число α, удовлетворяющее уравнению $\cos x = a$, то число $-\alpha$ изображается точкой Q. Число $-\alpha$ также удовлетворяет данному уравнению (почему?). Все решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид:

$$x = 2\pi n \pm \alpha.$$

104. Построение угла по данному значению его тангенса и решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Задача 3. Построить угол, тангенс которого равен a, и решить уравнение $\operatorname{tg} x = a$.

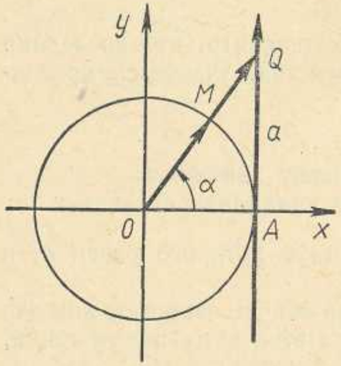

Рис. 134

Решение. Построим единичную окружность с центром в начале координат (рис. 134). Проведем касательную к этой окружности в точке A (1, 0), выберем на ней направление такое же, как у оси Oy. Полученную ось называют *осью тангенсов*.

Если единичный вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с осью абсцисс угол α, то тангенс α равен отношению ординаты y точки M к абсциссе x этой точки, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{AQ}{|OA|} = \frac{AQ}{1} = AQ.$$

Таким образом, тангенс угла α, образованного вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью абсцисс, по модулю равен длине отрезка AQ, отсекаемого на оси тангенсов лучом OQ. Знак тангенса определяется направлением отрезка AQ по отношению к положительному направлению оси тангенсов. На рисунке 134 взято число $a > 0$ и на оси тангенсов отложен отрезок AQ, по длине равный a, в положительном направлении оси тангенсов. Вектор $\overrightarrow{OQ}$ образует с осью абсцисс один из искомых углов. Так как число π является наименьшим положительным периодом для тангенса, то все искомые углы имеют вид $\pi n + \alpha$, где n — любое целое число.

Если $a < 0$, то отрезок AQ, длина которого равна $(-a)$, надо откладывать в сторону, противоположную положительному направлению оси тангенсов.

Так как на оси тангенсов можно отложить отрезок любой длины и в любую сторону, то эта задача на построение имеет решение при любом значении a.

Для решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ достаточно найти одно число α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = a$, и написать ответ: $x = \pi n + \alpha$. Например, решения уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ запишутся в виде $x = \pi n + \frac{\pi}{3}$.

105. Построение угла по данному значению его котангенса и решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

Задача 4. Построить угол, котангенс которого равен a, и решить уравнение $\operatorname{ctg} x = a$.

Решение. Построим единичную окружность с центром в

начале координат (рис. 135) и проведем касательную к этой окружности в точке B. Выберем на ней направление такое же, как у оси Ox. Полученную ось называют *осью котангенсов*.

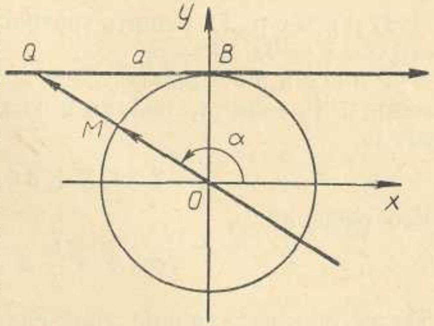

Рис. 135

Если единичный вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с осью абсцисс угол α, то котангенс α равен отношению абсциссы x точки M к ее ординате y, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = BQ.$$

Таким образом, котангенс угла α равен по абсолютной величине длине отрезка BQ, отсекаемого на оси котангенсов продолжением единичного вектора $\overrightarrow{OM}$, образующего с осью абсцисс искомый угол α. На рисунке $a < 0$, поэтому отрезок BQ отложен на оси котангенсов в отрицательном направлении. Вектор $\overrightarrow{OQ}$ образует с осью абсцисс один из искомых углов.

Для отыскания всех углов (чисел), удовлетворяющих уравнению $\operatorname{ctg} x = a$, достаточно найти один угол (число) α, для которого $\operatorname{ctg}\alpha = a$, и записать ответ в виде $x = \pi n + \alpha$.

Эта задача имеет решение при любом значении a.

Упражнения к пп. 102—105

722. Показать, что решениями уравнения $\sin x = 0$ являются все числа вида $x = \pi n$ при любом целом n и только эти числа.

723. Показать, что решениями уравнения $\cos x = 0$ являются все числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число.

724. По заданным значениям тригонометрических функций построить углы и измерить их с помощью транспортиров в градусной и радианной мерах. Затем написать общий вид углов, удовлетворяющих заданным уравнениям: 1) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 2$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

106. Решение некоторых тригонометрических уравнений

Рассмотренные в предыдущих пунктах уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ называются *простейшими тригонометрическими уравнениями*.

В более сложных случаях тригонометрические уравнения стараются преобразовать так, чтобы свести задачу к решению указанных простейших уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

П р и м е р 1. Решить тригонометрическое уравнение $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$.

Р е ш е н и е. Заменяя $\sin^2 x$ тождественно равным ему выражением $1-\cos^2 x$, получаем квадратное уравнение относительно $\cos x$:

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$$

Его решения:

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ и } \cos x = -2.$$

Таким образом, данное уравнение равносильно двум простейшим уравнениям. Решая их, мы найдем все решения данного уравнения. Из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем: $x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$. Уравнение $\cos x = -2$ не имеет решений, так как абсолютная величина косинуса x не может быть больше единицы.

Следовательно, искомая совокупность решений $x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$, где n — любое целое число.

П р и м е р 2. Решить уравнение $\cos x = 2\operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е. Заменяем $\operatorname{tg} x$ на $\frac{\sin x}{\cos x}$ и последовательно получаем:

$$\cos x = \frac{2\sin x}{\cos x};\ \cos^2 x = 2\sin x;$$

$$1-\sin^2 x = 2\sin x;\ \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0;$$

$$1)\ \sin x = -1+\sqrt{2};\quad 2)\ \sin x = -1-\sqrt{2}.$$

Из первого уравнения получаем $\sin x \approx 0{,}4142$, $x_1 \approx 2\pi n + 0{,}43$, $x_2 \approx 2\pi n + \pi - 0{,}43$, где n — любое целое число.

Второе уравнение не имеет решений, так как $|-1-\sqrt{2}| > 1$.

П р и м е р 3. Решить уравнение $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$.

Р е ш е н и е. Такое уравнение называется однородным уравнением второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$, так как все его члены имеют вторую степень относительно $\sin x$ и $\cos x$. Если в это уравнение подставить $\cos x = 0$, то получим $\sin x = 0$ и наоборот. Так как равенства $\cos x = 0$, $\sin x = 0$ не могут выполняться одновременно ни при каком значении x (почему?), то для решения уравнения $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. Поэтому обе части данного уравнения можно разделить на $\cos^2 x$, после чего получим уравнение

$$2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

равносильное данному уравнению. Из последнего уравнения получаем:

$$\operatorname{tg} x = 1,\ \operatorname{tg} x = -\frac{5}{3},$$

а значит,

$$x_1 = \pi n + \frac{\pi}{4},\ x_2 \approx \pi n - 1{,}03,$$

где n — любое целое число.

Упражнения

Решить уравнения:

725. $3\sin x = 2\cos^2 x$.
726. $\cos^2 x - 2\sin x = -\frac{1}{4}$.
727. $6\cos^2 x + 5\cos x + 1 = 0$.
728. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.
729. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$.
730. $\cos^2 x + 2\sin x \operatorname{ctg} x = \frac{5}{4}$.
731. $\operatorname{ctg} x = 2\cos x$.
732. $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$.
733. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$.
734. $\frac{2\cos x - 3\sin x}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{2}$.
735. $3\operatorname{tg}^2 x + \frac{2}{\operatorname{ctg} x} - 5 = 0$.
736. $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$.
737. $\sin^2 x = \cos^2 x$.
738. $2\sin^2 x - 3\cos^2 x + 3\sin x\cos x = 0$.
739. $5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$.
740. $7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0$.

§ 18. Свойства тригонометрических функций и их графики

107. Свойства функции синус и ее график

Так как синус — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π, то для изучения ее свойств во всей области определения достаточно изучить их лишь в промежутке длины 2π, например $[0; 2\pi]$. Во всех остальных таких промежутках эти свойства будут повторяться.

Разделим промежуток $[0; 2\pi]$ на четыре равные части (четверти)

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right],\ \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right],\ \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$$

и докажем следующие свойства функции синус:

1. В I четверти функция строго возрастает от 0 до 1.

2. Во II четверти функция строго убывает от 1 до 0.
3. В III четверти функция строго убывает от 0 до —1.
4. В IV четверти функция строго возрастает от —1 до 0.

Эти свойства могут быть записаны в виде таблицы:

x	0	I четв.	$\frac{\pi}{2}$	II четв.	π	III четв.	$\frac{3\pi}{2}$	IV четв.	2π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	—1	↗	0

Стрелки ↗ и ↘ показывают соответственно возрастание и убывание синуса.

Для доказательства этих свойств строим единичную окружность с центром в начале системы координат uOy, где для удобства ось абсцисс обозначена через Ou, и на этой окружности будем отмечать

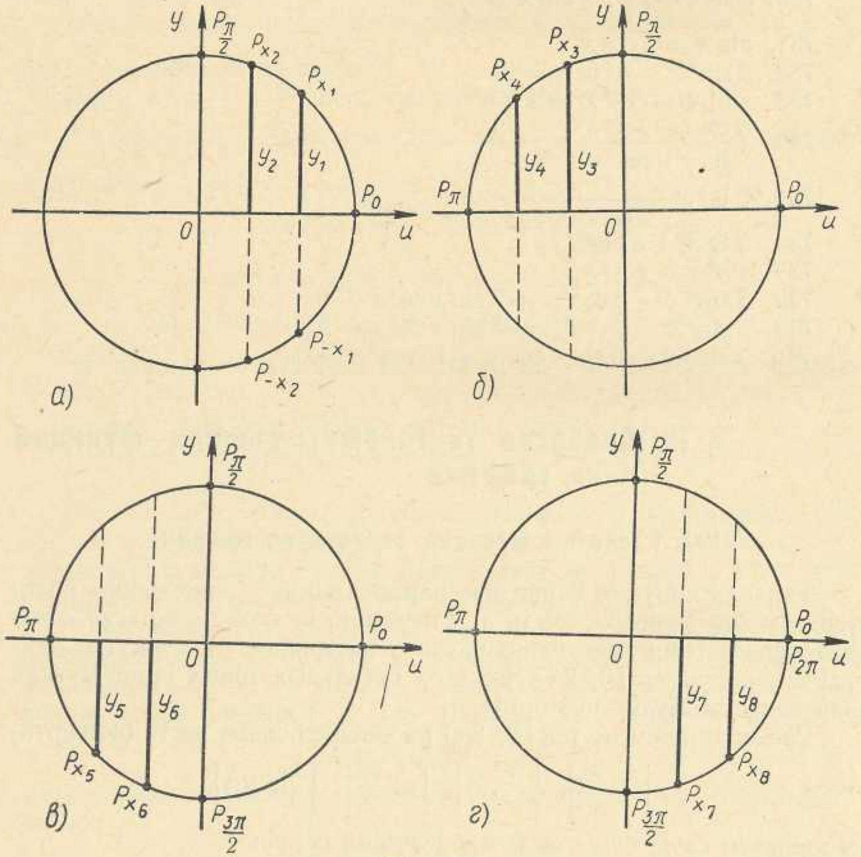

Рис. 136

точки, изображающие значения аргумента x, взятые из промежутка $[0;\ 2\pi]$ (рис. 136 *а*—г). Ординаты отмеченных на рисунках 136 а—г точек будут представлять собой значения синусов чисел, изображаемых соответствующими точками P_x, т. е. $y_1 = \sin x_1$, $y_2 = \sin x_2$, $y_3 = \sin x_3$ и т. д.

Из курса геометрии известно, что из всех хорд окружности диаметр имеет наибольшую длину, в нашем случае равную 2, и из двух дуг, меньших полуокружности, бо́льшая из них стягивается большей хордой. Так, на рисунке 136 а $\smile P_{-x_1} P_{x_1}$ меньше $\smile P_{-x_2} P_{x_2}$ и поэтому хорда $P_{-x_1} P_{x_1}$ меньше хорды $P_{-x_2} P_{x_2}$. Так как $|P_{-x_1} P_{x_1}| = 2y_1$ и $|P_{-x_2} P_{x_2}| = 2y_2$, то $2y_1 < 2y_2$ или $y_1 < y_2$. Точно так же получается неравенство $y_3 > y_4$ и, если учесть знаки значений синуса, $y_5 > y_6$ и $y_7 < y_8$ (см., соответственно, рис. 136б, 136в, 136г).

Таким образом, при перемещении точки M по дуге $P_0P_{\frac{\pi}{2}}$ в положительном направлении ее ордината y будет возрастать от 0 до 1, а это означает, что при увеличении значений аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ значения синуса будут увеличиваться от 0 до 1. Во второй четверти из $x_3 < x_4$ следует $\sin x_3 > \sin x_4$ и при увеличении значений аргумента x от $\frac{\pi}{2}$ до π значения синуса будут уменьшаться от 1 до 0. При $x = \frac{\pi}{2}$ синус достигает своего наибольшего значения (максимума) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. В III и IV четвертях ординаты всех точек, кроме точек P_π и $P_{2\pi}$, отрицательны. Из $x_5 < x_6$ следует $\sin x_5 > \sin x_6$, из $x_7 < x_8$ следует $\sin x_7 < \sin x_8$. В III четверти с возрастанием аргумента x значения синуса убывают от 0 до —1, в IV четверти значения синуса возрастают от —1 до 0. Следовательно, при $x = \frac{3\pi}{2}$ синус достигает своего наименьшего значения (минимума) $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$.

Напомним основные свойства функции синус, полученные выше:

1. Область определения синуса — множество всех действительных чисел (вся числовая ось).
2. Множество значений синуса — отрезок $[-1,\ 1]$. Другими словами, синус — ограниченная функция.
3. Синус — нечетная функция, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$ при любом значении аргумента x.
4. Эта функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. равенство $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ справедливо для любого значения аргумента x.
5. Значения этой функции равны нулю для $x = \pi n$, где n — любое целое число.

6. Синус имеет максимумы, равные 1, при всех $x = 2\pi + \frac{\pi}{2}$.

7. Синус имеет минимумы, равные —1, при всех $x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$.

8. При всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n < x < 2\pi n + \pi, \quad \sin x > 0.$$

9. При всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n + \pi < x < 2\pi n + 2\pi, \quad \sin x < 0.$$

В свойствах 6—9 n — любое целое число.

Промежутки, указанные в свойствах 8 и 9, называются *промежутками знакопостоянства синуса*.

График функции синус был построен в п. 94 (рис. 118).

По этому графику можно наглядно представить себе свойства синуса, перечисленные выше. Например, синусоида симметрична относительно начала координат, т. е. если какая-либо точка F принадлежит синусоиде, то точка F_1, ей симметричная относительно начала координат, тоже принадлежит синусоиде. Это справедливо для графиков любых нечетных функций.

В п. 94 приведено геометрическое построение синусоиды. Тот же самый график можно построить при помощи таблицы тригонометрических функций числового аргумента (В. М. Брадис, табл. XII).

Упражнения

741. Построить синусоиду при помощи следующей таблицы:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4,5	5	5,5	6
$\sin x$	0	0,48	0,84	0,997	0,91	0,60	—0,35	—0,76	—0,98	—0,90	—0,71	—0,28

В качестве масштабного отрезка на осях координат взять 1 *см*.

742. Расположить в порядке возрастания числа:

1) $\sin 15°$, $\sin 75°$, $\sin 56°$;
2) $\sin 115°$, $\sin 127°$, $\sin 156°$, $\sin 175°$;
3) $\sin 220°$, $\sin 250°$, $\sin 256°$;
4) $\sin 280°$, $\sin 290°$, $\sin 296°$, $\sin 315°$, $\sin 340°$;
5) $\sin 1$, $\sin 1{,}5$, $\sin 1{,}52$, $\sin 1{,}55$;
6) $\sin 1{,}8$, $\sin 2{,}1$, $\sin 2{,}5$, $\sin 3$;
7) $\sin 3{,}5$, $\sin 4$, $\sin 4{,}2$, $\sin 4{,}4$;
8) $\sin 5$, $\sin 5{,}5$, $\sin 5{,}8$, $\sin 6$.

743. Отметить на графике промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x < -\frac{1}{2}$; в) $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

108. Свойства функции косинус и ее график

Для изучения свойств косинуса достаточно изучить их на одном промежутке длины 2π, например $[0;\ 2\pi]$. Во всех остальных таких промежутках эти свойства будут повторяться.

Докажем следующие свойства косинуса:

1. В I четверти функция строго убывает от 1 до 0.
2. Во II четверти функция строго убывает от 0 до —1.
3. В III четверти функция строго возрастает от —1 до 0.
4. В IV четверти функция строго возрастает от 0 до 1.

Эти свойства могут быть записаны в виде таблицы:

x	0	I четв.	$\frac{\pi}{2}$	II четв.	π	III четв.	$\frac{3\pi}{2}$	IV четв.	2π
$\cos x$	1	↘	0	↘	—1	↗	0	↗	1

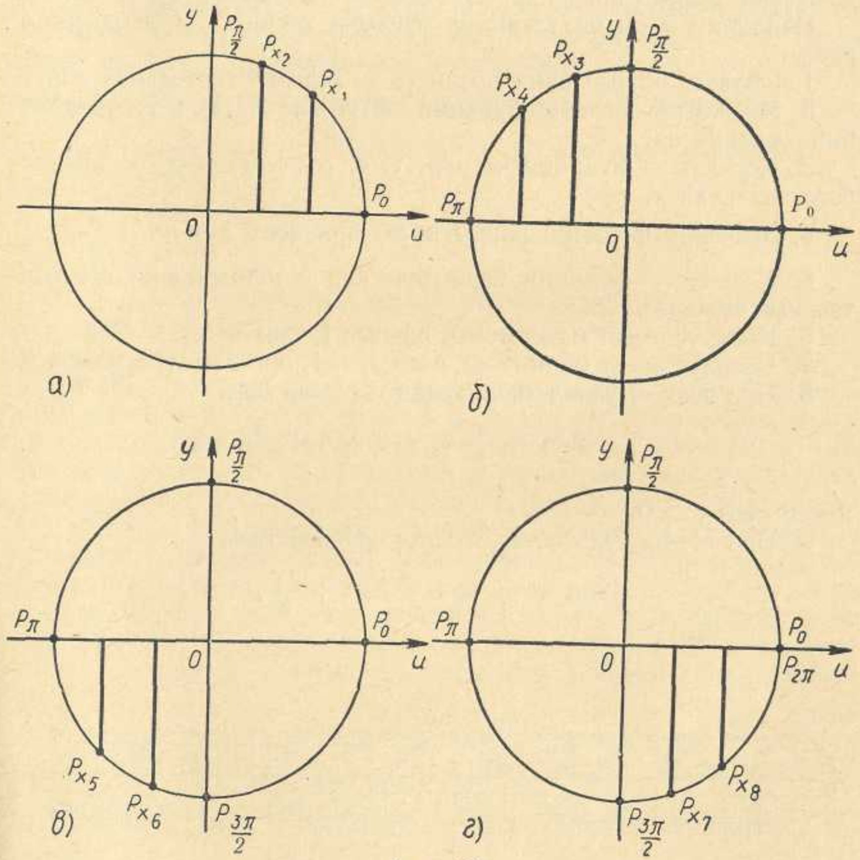

Рис. 137

Для доказательства этих свойств строим единичную окружность с центром в начале координат и на ней будем отмечать точки, изображающие значения аргумента x, взятые из промежутка $[0;\ 2\pi]$ (см. рис. 137 а—г). Абсциссы отмеченных точек единичной окружности будут представлять собой значения косинуса чисел, изображаемых этими точками. В I четверти с увеличением значений аргумента соответственные значения абсцисс будут уменьшаться, т. е. из $x_2 > x_1$ следует $\cos x_2 < \cos x_1$. Причем если значения аргумента x возрастают от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то значения $\cos x$ убывают от 1 до 0 (рис. 137а). Во II четверти из $x_4 > x_3$ следует $\cos x_4 < \cos x_3$, т. е. при возрастании значений аргумента x от $\frac{\pi}{2}$ до π значения $\cos x$ становятся отрицательными, убывая от 0 до —1 (рис. 137б). В III и IV четвертях с возрастанием значений аргумента x от π до 2π значения $\cos x$ возрастают от —1 до 1 (рис. 137 в и г). Убедиться в последнем выводе представляется самим читателям.

Напомним основные свойства функции косинус, установленные ранее:

1. Область определения косинуса — вся действительная ось.
2. Множество значений функции —отрезок $[-1, 1]$, т. е. эта функция ограничена.
3. Косинус — функция четная, т. е. $\cos(-x) = \cos x$ для любого значения x.
4. Значения функции равны нулю при всех $x = \pi n + \frac{\pi}{2}$.
5. Косинус — функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π.
6. Косинус имеет максимумы, равные 1, при всех $x = 2\pi n$.
7. Косинус имеет минимумы, равные —1, при всех $x = 2\pi n + \pi$.
8. При всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < 2\pi n + \frac{\pi}{2},$$

имеем: $\cos x > 0$.

9. При всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi n + \frac{\pi}{2} < x < 2\pi n + \frac{3\pi}{2},$$

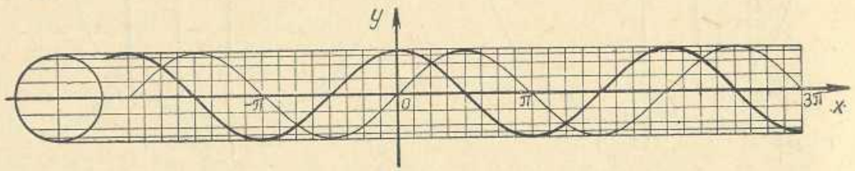

Рис. 138

имеем:

$$\cos x < 0.$$

В свойствах 4,6—9 n—любое целое число.

Промежутки, указанные в свойствах 8 и 9, являются *промежутками знакопостоянства косинуса*.

По графику косинуса (рис. 121) можно наглядно представить себе все свойства этой функции, перечисленные выше. Например, этот график симметричен относительно оси ординат. Это свойство графиков справедливо для всех четных функций.

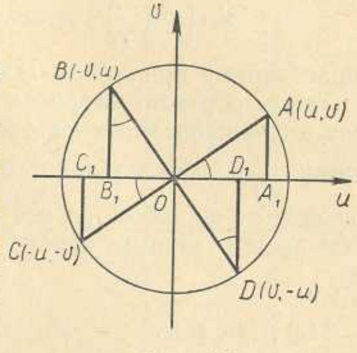

Рис. 139

Если мы построим графики синуса и косинуса в одной и той же системе координат, как это показано на рисунке 138, то увидим, что они отличаются друг от друга только тем, что имеют различное расположение относительно системы координат. Так, если синусоиду сдвинем в отрицательном направлении оси абсцисс на отрезок длины $\frac{\pi}{2}$, то получим график косинуса. Это следует из того, что при любом значении аргумента x выполняются равенства

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \text{ и } \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Для доказательства последних утверждений на единичной окружности (рис. 139) произвольно выбираем четыре точки, делящие ее на четыре равные части. Из равенства треугольников OA_1A, BB_1O, OC_1C и DD_1O следует, что если координаты точки A обозначим через u и v, т. е. положим $A(u,\ v)$, то остальные точки будут иметь следующие координаты: $B(-v,\ u)$, $C(-u,\ -v)$ и $D(v,\ -u)$. Это показывает, что при переходе от любой из отмеченных точек к соседней в положительном направлении (против часовой стрелки) абсцисса каждой точки становится ординатой следующей, а ордината каждой меняет свой знак и становится абсциссой следующей точки. Если какая-либо из отмеченных точек изображает число x, то ее координатами будут числа $\cos x$, $\sin x$. Тогда следующая за ней в положительном направлении точка, по доказанному, будет иметь координаты $-\sin x$, $\cos x$. Но эта соседняя точка изображает число $x + \frac{\pi}{2}$, и поэтому ее координатами будут числа $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Так как числа $-\sin x$, $\cos x$ и $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ являются координатами одной и той же точки, то отсюда и следуют равенства

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \text{ и } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

справедливые при любом значении аргумента x.

Таким образом, *графиком косинуса является синусоида, сдвинутая в отрицательном направлении оси абсцисс на отрезок длины, равной* $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, если построена синусоида, то вышеуказанным способом из нее легко получается график косинуса. Еще проще сдвинуть вправо систему координат на отрезок длины $\frac{\pi}{2}$.

Примеры.

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};\quad \cos\frac{5\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

744. Расположить в порядке возрастания числа:

1) $\cos 15°$, $\cos 75°$, $\cos 140°$, $\cos 230°$, $\cos 280°$, $\cos 1000°$;

2) $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 5$, $\cos 5{,}3$, $\cos 5{,}8$.

745. Отметить по графику косинуса промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\cos x > \frac{1}{2}$; б) $\cos x < -\frac{1}{2}$; в) $\cos x = \frac{3}{4}$; г) $|\cos x| < \frac{1}{2}$; д) $|\cos x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

109. Свойства тангенса и график этой функции

Для изучения свойств тангенса достаточно изучить их в промежутке длины π (π — период функции тангенс), например в промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Во всех остальных таких промежутках эти свойства будут повторяться. Мы выбрали для изучения интервал $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, исключив его концы $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, так как функция tg в этих точках не определена.

Эта функция обладает следующими свойствами:

1. Область определения тангенса — множество всех действительных чисел, за исключением всех чисел вида $\pi n+\frac{\pi}{2}$ при любом целом n.

2. Область значений этой функции — множество всех действительных чисел, т. е. тангенс — неограниченная функция.

3. Тангенс — нечетная функция, т. е. $\operatorname{tg}(-x)=\operatorname{tg} x$ для любого значения аргумента из области определения.

4. Эта функция периодическая, с наименьшим положительным периодом π.

5. Значения тангенса равны нулю во всех точках $x=\pi n$ при любом целом n.

6. Тангенс не имеет ни максимумов, ни минимумов.

7. При всех x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n-\frac{\pi}{2}<x<\pi n$, n-любое целое число, $\operatorname{tg}x<0$.

8. При всех x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n<x<\pi n+\frac{\pi}{2}$, где n—любое целое число, $\operatorname{tg} x>0$.

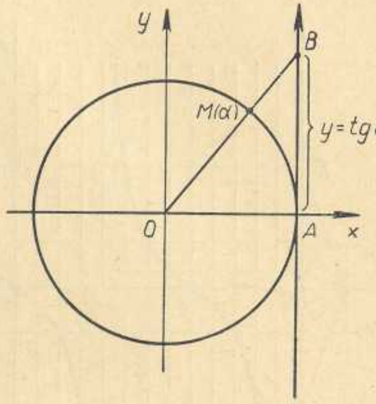

Рис. 140

Эти свойства были установлены ранее, кроме них существенно свойство:

9. На промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ тангенс строго возрастает, пробегая все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Последнее свойство вытекает из того, что при $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ луч, исходящий из начала координат O и проходящий через точку $M(\alpha)$ единичной окружности, пересекает линию тангенсов в точке B и соответствие (рис. 140)

$$\alpha\mapsto M(\alpha)\mapsto B$$

таково, что при возрастании α точка B перемещается по линии тангенсов снизу вверх, пробегая ее полностью.

При приближении α к $-\frac{\pi}{2}$ или к $\frac{\pi}{2}$ модуль значения тангенса неограниченно возрастает, или, как говорят, «стремится к бесконечности».

Для построения графика тангенса строим единичную окружность с центром на оси абсцисс, как показано на рисунке 141, и проводим линию тангенсов AB. Затем делим промежуток $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ оси абсцисс и правую полуокружность (рис. 141) на одинаковое число равных частей (на рис. 141 на 8 частей) и проводим лучи из центра окружности через точки деления до их пересечения с осью тангенсов. Через полученные точки проводим прямые параллельно оси абсцисс. Точки их пересечения с прямыми, проведенными через соответствующие точки деления промежутка $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ параллельно оси ординат, принадлежат графику функции тангенса. Соединяем эти точки плавной линией, получаем приближенное

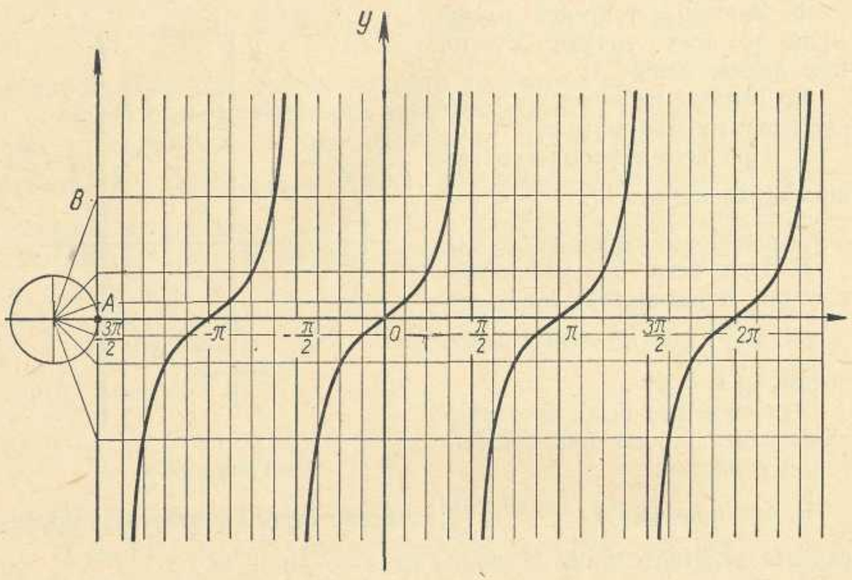

Рис. 141

изображение графика в промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Аналогично строится график функции тангенс в других промежутках длины π, например $\left]-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[$ и др. Говорят, что тангенс в точках $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ и т. п. имеет разрывы. В каждом из промежутков оси абсцисс между двумя соседними точками разрыва тангенс возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Упражнения

746. Отметить по графику тангенса промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\operatorname{tg} x > 1$; б) $\operatorname{tg} x < -1$; в) $|\operatorname{tg} x| < 1$.

110. Свойства котангенса и график этой функции

Так же как и для тангенса, свойства котангенса достаточно изучить в любом промежутке длины π (π — период котангенса), например $]0; \pi[$.

Перечислим основные свойства котангенса:

1. Область определения котангенса — множество всех действительных чисел, из которого надо исключать все числа πn при любом целом значении n.

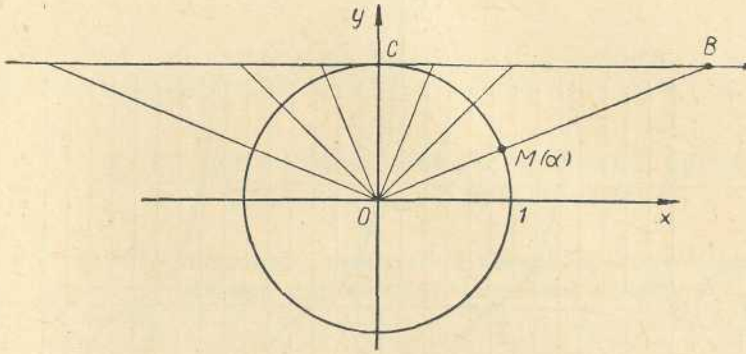

Рис. 142

2. Множество значений — множество всех действительных чисел, т. е. котангенс — неограниченная функция.
3. Котангенс — функция нечетная.
4. Котангенс — функция периодическая, с наименьшим положительным периодом π.
5. Значения котангенса равны нулю во всех точках $\pi n + \frac{\pi}{2}$ при любом целом значении n.
6. Котангенс не имеет ни максимумов, ни минимумов.
7. При всех значениях аргумента x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n < x < \pi n + \frac{\pi}{2}$, где n — любое целое число, $\operatorname{ctg} x > 0$.
8. При всех значениях аргумента x, удовлетворяющих неравенствам $\pi n + \frac{\pi}{2} < x < \pi n + \pi$, где n — любое целое число, $\operatorname{ctg} x < 0$.
9. В промежутке $]0; \pi[$ котангенс строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

Свойства 7—9 легко обосновываются с помощью соответствия

$$\alpha \mapsto M(\alpha) \mapsto B \quad (\text{рис. } 142)$$

между числом α в пределах $0 < \alpha < \pi$, точкой $M(\alpha)$ на единичной окружности и точкой B пересечения луча OM с осью котангенсов. Значение $\operatorname{ctg}\alpha$ равно длине отрезка CB с учетом его знака.

Для построения графика котангенса рассмотрим единичную окружность с центром на оси абсцисс. Начало отсчета на этой окружности выберем в точке C (рис. 143). Тогда линия котангенсов будет касаться окружности в точке C и ее положительное направление совпадает с положительным направлением оси ординат. Дальнейшее построение такое же, как и для тангенса, что показано на рисунке 143.

Впрочем, график котангенса можно получить из графика тангенса следующим образом:

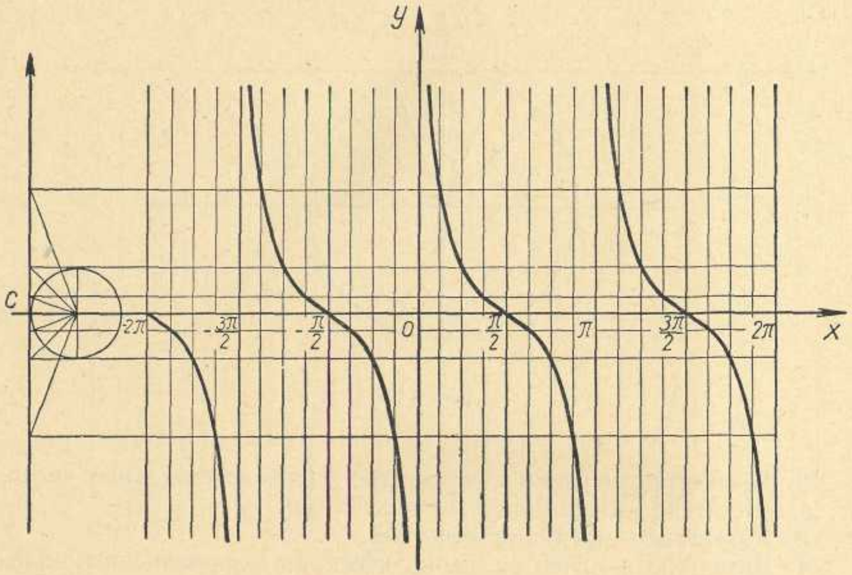

Рис. 143

1. С помощью формул

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \text{ и } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

полученных в пункте 108, найдем:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\operatorname{ctg} x.$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

2. Если сдвинуть график тангенса влево на отрезок, равный $\frac{\pi}{2}$, получим график функции, определяемой уравнением

$$y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Построив график, симметричный относительно оси абсцисс сдвинутому графику тангенса, получим искомый график котангенса.

Упражнения

747. Отметить по графику котангенса промежутки, в которых выполняются неравенства: а) $\operatorname{ctg} x>1$; б) $\operatorname{ctg} x<-1$; в) $|\operatorname{ctg} x|<1$.

§ 19. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов

111. Сложение поворотов и преобразование координат вектора при повороте системы координат

Если повернуть луч или вектор сначала на угол α, а потом на угол β, то конечный результат будет тем же самым, как при повороте на угол

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

Например, поворот на угол 500° с последующим поворотом на угол —550° даст тот же результат, как поворот на —50°.

В п. 98 мы получили представление вектора $\vec{a}$ в виде

$$\vec{a}=x_a\cdot\vec{i}+y_a\cdot\vec{j}, \qquad (1)$$

которое для единичного вектора $\vec{e}$, образующего угол α с осью абсцисс, приобретает вид

$$\vec{e}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\sin\alpha\cdot\vec{j}. \qquad (2)$$

Повернем оси координат Ox и Oy на угол α вокруг точки O. Обозначим новые оси через Ou и Ov (рис. 144), а орты новых осей через $\vec{i_1}$ и $\vec{j_1}$. Орт $\vec{i_1}$ образует с осью Ox угол α, и поэтому он через орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ старых осей выражается равенством

$$\vec{i_1}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\sin\alpha\cdot\vec{j}. \qquad (3)$$

Орт $\vec{j_1}$ образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{2}+\alpha$, так как орт $\vec{i}$ после поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ переходит в орт $\vec{j}$, а при последующем повороте на угол α — в орт $\vec{j_1}$. Поэтому получаем:

$$\vec{j_1}=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{i}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{j}.$$

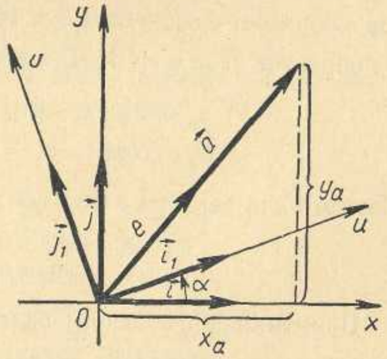

Рис. 144

В п. 108 было установлено, что $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ и $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$ $=-\sin x$. Следовательно, выражение для орта $\vec{j_1}$ принимает вид:

$$\vec{j_1}=-\sin\alpha\cdot\vec{i}+\cos\alpha\cdot\vec{j}. \tag{4}$$

Поставим задачу: выразить координаты x_a и y_a вектора $\vec{a}$ в системе координат xOy через его координаты u_a и v_a в новой системе координат uOv.

В этой системе координат имеем для вектора $\vec{a}$ выражение

$$\vec{a}=u_a\cdot\vec{i_1}+v_a\cdot\vec{j_1}. \tag{5}$$

Подставляя в последнее равенство вместо ортов $\vec{i_1}$ и $\vec{j_1}$ их выражения (3) и (4), получим:

$$\vec{a}=u_a(\cos\alpha\cdot\vec{i}+\sin\alpha\cdot\vec{j})+v_a(-\sin\alpha\cdot\vec{i}+\cos\alpha\cdot\vec{j}),$$

или

$$\vec{a}=(\cos\alpha\cdot u_a-\sin\alpha\cdot v_a)\vec{i}+(\sin\alpha\cdot u_a+\cos\alpha\cdot v_a)\vec{j}. \tag{6}$$

Так как вектор $\vec{a}$ выражается через орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ единственным образом, то, сравнивая выражения (1) и (6), приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} x_a&=\cos\alpha\cdot u_a-\sin\alpha\cdot v_a,\\ y_a&=\sin\alpha\cdot u_a+\cos\alpha\cdot v_a.\end{aligned} \tag{7}$$

Формулы (7) и являются решением поставленной задачи.

112. Синус и косинус суммы и разности

Пусть ось Ou наклонена к оси Ox под углом α, а единичный вектор $\vec{e}$ образует с осью Ou (рис. 145) угол β. Тогда этот вектор с осью Ox образует угол $\alpha+\beta$. Для вектора $\vec{e}$ имеем:

$$\begin{aligned} x_e&=\cos(\alpha+\beta);\quad y_e=\sin(\alpha+\beta);\\ u_e&=\cos\beta;\quad v_e=\sin\beta.\end{aligned} \tag{8}$$

Поэтому для вектора $\vec{e}$ формулы (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} x_e&=\cos\alpha\, u_e-\sin\alpha\, v_e,\\ y_e&=\sin\alpha\, u_e+\cos\alpha\, v_e.\end{aligned} \tag{9}$$

Применяя к последним равенствам формулы (8), получаем:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned} \tag{10}$$

Формулы (10) справедливы для любых углов, а следовательно, и для любых действительных чисел и дуг окружности.

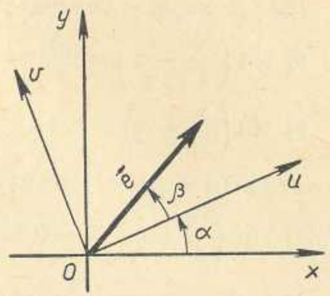

Рис. 145

Если в формулах (10) произвести замену β на $-\beta$ и учесть свойства четности косинуса и нечетности синуса, то получатся формулы для синуса и косинуса разности двух аргументов:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned} \tag{11}$$

В частности, из формулы для $\cos(\alpha-\beta)$ при $\alpha=\beta$ получится известная формула:

$$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$$

Пример. Вычислить $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\operatorname{tg} 15°$, $\operatorname{ctg} 15°$.

Решение. Известно, что

$$\sin 45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60°=\frac{1}{2}.$$

Для решения данного примера воспользуемся формулами синуса и косинуса разности двух углов: $15°=60°-45°$,

$$\sin 15°=\sin(60°-45°)=\sin 60°\cdot\cos 45°-\cos 60°\cdot\sin 45°=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1);$$

$$\cos 15°=\cos(60°-45°)=\cos 60°\cdot\cos 45°+\sin 60°\cdot\sin 45°=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1);$$

$$\operatorname{tg} 15°=\frac{\sin 15°}{\cos 15°}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 15°=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$

Примечание. Для решения этого примера можно было бы также воспользоваться равенством $15°=45°-30°$.

Упражнения

748. Доказать, что $\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.
749. Вычислить $\cos 43°\cdot\cos 17°-\sin 43°\cdot\sin 17°$.
750. Вычислить $\sin 56°\cdot\cos 34°+\cos 56°\cdot\sin 34°$.
751. Вычислить $\sin 57°\cdot\cos 12°-\cos 57°\cdot\sin 12°$.
752. Вычислить $\sin 104°\cdot\cos 14°-\cos 104°\cdot\sin 14°$.
753. Вычислить $\sin 75°$, $\cos 75°$, $\operatorname{tg} 75°$, $\operatorname{ctg} 75°$.
754. Вычислить $\sin 105°$, $\cos 105°$, $\operatorname{tg} 105°$, $\operatorname{ctg} 105°$.

755. Доказать справедливость равенств:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

д) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; е) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$;

ж) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$. з) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

756. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и α в III четверти, а β в IV четверти.

757. Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\cos\beta=\frac{8}{17}$ и α в III четверти, а β в I четверти.

758. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ и α в I четверти, а β в III четверти.

759. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$, $\sin\beta=\frac{40}{41}$ и α в III четверти, а β во II четверти.

760. Вычислить $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{20}{29}$, $\cos\beta=-\frac{7}{25}$ и α и β во II четверти.

761. Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ и α во II четверти, а β в IV четверти.

Упростить следующие выражения:

762. $\sin(\alpha+60^\circ)+\sin(\alpha-60^\circ)$.

763. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

764. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

765. $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

766. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

767. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$.

768. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

Доказать следующие тождества:

769. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

770. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

771. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$.

772. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

Решить уравнения:

773. $\sin 2x\cos x=\cos 2x\sin x$.

774. $\cos 3x\cos 2x=-\sin 3x\sin 2x$.

775. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

776. $1+\sin x\sin 2x=\cos x\cos 2x$.

777. Выразить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$.

113. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

В дальнейшем изложении нам потребуются формулы для суммы и разности синусов и косинусов двух углов или чисел.

Для вывода этих формул выпишем равенства

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y, \qquad (1)$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y, \qquad (2)$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \qquad (3)$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y, \qquad (4)$$

полученные в предыдущем пункте.

Каковы бы ни были два числа α и β, всегда существует и притом единственная пара чисел x и y, для которой выполняются равенства:

$$\begin{cases}x+y=\alpha,\\ x-y=\beta.\end{cases} \qquad (5)$$

Это следует из того, что система уравнений (5) имеет и притом единственное решение:

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad y=\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (6)$$

Теперь мы можем получить нужные нам формулы.

Складывая почленно равенства (1) и (2), получим:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y.$$

В последнем равенстве производим замену по формулам (5) и (6) и получаем формулу для суммы синусов:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{7}$$

Вычитая из равенства (1) почленно равенство (2), получим равенство

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y,$$

которое после замены по формулам (5) и (6) принимает вид:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{8}$$

Точно так же из равенств (3) и (4) получим еще два равенства для суммы и разности косинусов:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{9}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{10}$$

Вывод последних равенств представляется читателям.

Иногда, учитывая то, что синус — нечетная функция, последнюю формулу записывают в виде

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \tag{10a}$$

Упражнения

778. Представить в виде произведения следующие выражения:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $\sin\alpha-\cos\alpha$.

§ 20. Производные тригонометрических функций

114. Об одном важном неравенстве

В дальнейшем изложении важную роль будет играть следующее неравенство:

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg}x|, \tag{1}$$

справедливое для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$-\frac{\pi}{2}<x<0$$

или неравенству

$$0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Докажем неравенство (1). Рассмотрим сначала случай, когда

$$0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Пусть угол AOD, $\widehat{AOD}=x$, опирается на дугу AD окружности единичного радиуса (рис. 146). Проведем через точку A окружности касательную AB. Обозначим через S_{OAD}, S_{OACD}, S_{OAB} площади треугольника OAD, сектора $OACD$ и треугольника OAB соответственно. Тогда

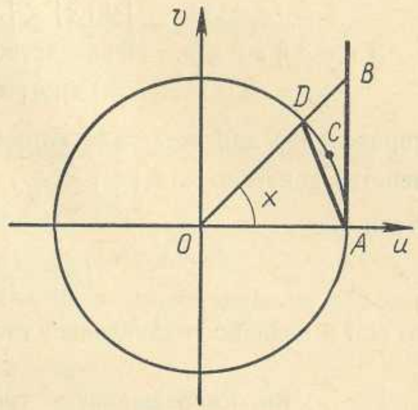

Рис. 146

$$S_{OAD}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OD|\cdot\sin x=$$
$$=\frac{1}{2}\sin x;$$

$$S_{OACD}=\frac{1}{2}r^2x=\frac{1}{2}x;$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

и так как

$$S_{OAD}<S_{OACD}<S_{OAB},$$

то

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x. \tag{2}$$

Таким образом, если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то неравенство (1) выполняется, так как в этом случае

$$|\sin x|=\sin x,\quad |x|=x,\quad |\operatorname{tg}x|=\operatorname{tg}x.$$

Если же

$$-\frac{\pi}{2}<x<0,$$

то

$$0<-x<\frac{\pi}{2}$$

и согласно неравенству (2)

$$\sin(-x)<x<\operatorname{tg}(-x). \tag{3}$$

Но для $x<0$ $\quad -x=|x|$;

$$\sin(-x)=-\sin x=|\sin x|;$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x=|\operatorname{tg}x|.$$

Следовательно, неравенство (3) принимает вид:

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

З а м е ч а н и е. Неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x| \tag{4}$$

справедливо для всех действительных x. В самом деле, это неравенство доказано для $|x| < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$. При $x = 0$ оно очевидно. Если же

$$|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1{,}5,$$

то оно и подавно справедливо, так как $|\sin x| \leqslant 1$.

115. Непрерывность тригонометрических функций

Т е о р е м а 1. *Функция* $\sin x$ *непрерывна на всей действительной прямой, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим модуль разности $\sin x - \sin x_0$.

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| = 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2 \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|.$$

Мы воспользовались неравенством

$$\left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 1$$

и неравенством (4) из предыдущего пункта.

Для любого $\varepsilon > 0$, выбрав $\delta = \varepsilon$, при $|x - x_0| < \delta$ будем иметь

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

а значит,

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0,$$

что и означает непрерывность функции $\sin x$ в точке x_0.

Т е о р е м а 2. *Функция* $\cos x$ *непрерывна на всей действительной прямой, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из оценки

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|2 \sin \frac{x_0 - x}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}\right| = 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \times$$

$$\times \left|\sin \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2 \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

следует, что для любого $\varepsilon > 0$, выбрав $\delta = \varepsilon$, при $|x - x_0| < \delta$ будем иметь

$$|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon,$$

что и означает непрерывность функции $\cos x$ в точке x_0.

Т е о р е м а 3. *Функции* $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *непрерывны в области своего определения, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0,$$

соответственно, для любых $x_0 \in D(\operatorname{tg})$ *и* $x_0 \in D(\operatorname{ctg})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то $\cos x_0 \neq 0$. Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \sin x}{\lim\limits_{x \to x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

Аналогично доказывается, что для любого $x_0 \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

Упражнения

779. Доказать непрерывность функции $\operatorname{ctg} x$.

116. Предел отношения длины хорды к длине стягивающей ее дуги

Т е о р е м а 1. *Справедливо следующее предельное равенство:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Тогда выполняется неравенство (см. п. 114):

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

10 Заказ 1079

Разделив все три части этого неравенства на $|\sin x|$, получим:

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \frac{1}{|\cos x|}.$$

Учитывая, что при указанных условиях

$$\frac{x}{\sin x} > 0, \ \cos x > 0$$

(объясните почему?), получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или, перейдя к обратным величинам,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (1)$$

Так как

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

то левая и правая части неравенства (1) при x, стремящемся к нулю, стремятся к одному и тому же пределу, равному единице. Поэтому и средняя часть этого неравенства

$$\frac{\sin x}{x}$$

также стремится к 1 при x, стремящемся к нулю, что и требовалось доказать.

Замечание. Простота соотношения

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

связана с тем, что

$$\sin x = \sin (x \ \text{рад}).$$

Если бы мы приняли другое условие

$$\sin x = \sin x^\circ,$$

то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^\circ}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{180} \ \text{рад}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{180} \ \text{рад}\right)}{\frac{\pi x}{180}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}.$$

Теорема 2. ***Предел отношения длины хорды окружности к длине стягивающей ее дуги равен единице при стремлении длины дуги к нулю.***

Доказательство. Пусть хорда AB окружности радиуса r стягивается дугой, содержащей x радианов, тогда длина хорды AB равна

$$|AB| = 2r \sin \frac{x}{2},$$

а длина дуги AB равна rx. Поэтому (рис. 147)

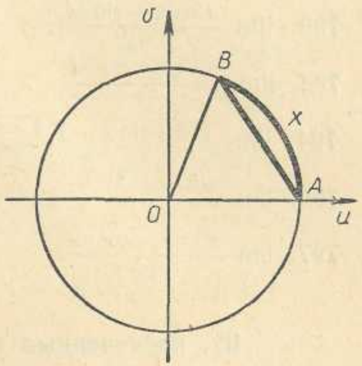

Рис. 147

$$\lim_{\smile{AB} \to 0} \frac{|AB|}{\smile{AB}} = \lim_{\smile{AB} \to 0} \frac{2r \sin\frac{x}{2}}{xr} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 5.$

Пример 3. $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi = 1 \cdot \pi = \pi.$

Пример 4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$

Упражнения

Найти следующие пределы:

780. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x}$.

781. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 2x}$.

782. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$.

783. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin x}{x}$.

784. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x + 2}$.

785. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

786. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$.

787. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x}$.

788. $\lim\limits_{x \to 0} (x \operatorname{ctg} x)$.

789. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin^3 3x}$.

790. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 4x}{3x}$.

791. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{3x}$.

792. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 3x}{x^2}$.

793. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 7x}{2x}$.

794. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\sin x}-\sqrt{3-\sin x}}{x}$.

795. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-3x}{4x}$.

796. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$.

797. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

798. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

117. Производные тригонометрических функций

Т е о р е м а 1. ***Для всех действительных чисел*** x

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производную будем вычислять так, как это указано в п. 67.

1-й ш а г. Даем значению аргумента x приращение Δx, тогда функция $\sin x$ примет значение

$$\sin(x+\Delta x).$$

2-й ш а г. $\Delta\sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x$.

3-й ш а г. $$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

4-й ш а г. Заметим, что в силу непрерывности функции $\cos x$ в любой точке x

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Поэтому

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Т е о р е м а 2. ***Для всех действительных чисел*** x

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1-й ш а г. Даем аргументу x приращение Δx, тогда функция $\cos x$ примет значение

$$\cos(x+\Delta x).$$

2-й ш а г. $\Delta\cos x=\cos(x+\Delta x)-\cos x$.

3-й ш а г. $$\frac{\Delta\cos x}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

4-й ш а г. $$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-1\cdot\sin x=-\sin x.$$

При вычислении предела

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

мы учли непрерывность функции $\sin x$ в точке x.

Т е о р е м а 3.

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя теорему о производной частного, получим:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

П р и м е р 1. Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции, найдем:

$$[\sin(ax+b)]'=\cos(ax+b)\cdot(ax+b)'=a\cos(ax+b).$$

П р и м е р 2. $[\cos(ax+b)]'=-\sin(ax+b)\cdot(ax+b)'=$ $=-a\sin(ax+b)$.

П р и м е р 3. $[\sin(3x+4)]'=3\cos(3x+4)$.

П р и м е р 4. $[\cos(4x-5)]'=-4\sin(4x-5)$.

П р и м е р 5. $[\sin(2-5x)]'=-5\cos(2-5x)$.

П р и м е р 6. $[\cos(3-2x)]'=-2[-\sin(3-2x)]=2\sin(3-2x)$.

Упражнения

799. Доказать формулы из примеров 1 и 2 с помощью определения производной.

Найти производные следующих функций:

800. $y(x) = \operatorname{tg}(ax + b)$. **801.** $y(x) = \operatorname{ctg}(ax + b)$.

802. $f(x) = x^2 \operatorname{tg}\frac{x}{3}$. **803.** $q(x) = 3x^2 \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{6} - 2\right)$.

804. $h(x) = \frac{\sin(1-2x)}{3x+2}$. **805.** $y(x) = \frac{\sin(2x-3)}{\cos\frac{x}{5}}$.

806. $f(x) = \sin(3x-2)\operatorname{tg}\frac{x}{8}$. **807.** $q(x) = x\sin\frac{x}{3} + 2x\operatorname{tg}3x$.

808. $h(x) = (5x-2)\sin(2x-3)$. **809.** $y(x) = \sin^2 3x$.

810. $f(x) = \operatorname{tg}^5 4x$. **811.** $q(x) = \operatorname{tg}(3-2x)$.

812. $h(x) = 3\sin\cos^2 x + \sin^3 x$. **813.** $q(x) = \sin 2x \operatorname{tg}(3x-1)$.

814. $f(x) = \sin x$. Найти $f''(x)$, $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

815. $q(x) = \cos x$. Найти $q''(x)$, $q''(-\pi)$, $q''(0)$, $q''(\pi)$.

816. $y(x) = \sin kx$. Найти $y''(x)$, $y''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $y''(0)$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

817. $h(x) = \cos kx$. Найти $h''(x)$, $h''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $h''(0)$, $h''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

818. Показать, что функция

$$y(x) = \sin(kx + \varphi)$$

удовлетворяет уравнению

$$y'' + k^2 y = 0$$

(k и φ — постоянные).

819. Показать, что уравнению из упражнения 818 удовлетворяет и функция $\cos(kx + \varphi)$.

820. Показать, что уравнению из упражнения 818 удовлетворяют функции

$$C_1 \sin(kx + \varphi) + C_2 \cos(kx + \varphi)$$

при любых коэффициентах C_1 и C_2.

821. $y(x) = x^2 \sin x$. Найти y''. **822.** $q(x) = x\cos x$. Найти q''.

823. $h(x) = (x+2)\sin x + (3x-1)\cos x$. Найти h''.

824. $f(x) = (2x+3)\sin\frac{x}{5}$. Найти f''.

825. $g(x) = 3x\cos\left(\frac{x}{5} + 2\right)$. Найти g''.

826. Точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = a\operatorname{tg}\omega t.$$

Найти скорость и ускорение движения.

827. Определить силу, под действием которой материальная точка массы m совершает колебательное движение по закону

$$s(t) = A\sin(\omega t + \omega_0)$$

(A, ω, ω_0 — постоянные).

828. Высота H подъема тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, вычисляется по формуле

$$H = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Определить время подъема тела на наибольшую высоту, определить наибольшую высоту подъема тела.

829. Дальность s полета тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, вычисляется по формуле

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Найти угол α, при котором дальность полета будет наибольшей, и найти величину наибольшей дальности полета.

118. Угол наклона и угловой коэффициент прямой

Будем считать каждую невертикальную прямую в координатной плоскости направленной в сторону правой полуплоскости. Считая, как обычно, углы, отсчитываемые против часовой стрелки, положительными, а отсчитываемые по часовой стрелке — отрицательными, мы условимся, что угол любой невертикальной прямой с осью абсцисс лежит в пределах

$$-90° < \alpha < 90°.$$

Определенный таким образом угол между осью абсцисс и прямой называется *углом наклона прямой*. Естественно, что горизонтальной прямой приписывается угол наклона $\alpha = 0°$.

Что касается вертикальных прямых, то им с равным основанием можно было бы приписать углы наклона 90° или —90°.

Угол наклона α невертикальной прямой

$$y = kx + b$$

связан с угловым коэффициентом k простым соотношением:

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть прямые, проходящие через начало координат, т. е. прямые

$$y = kx \qquad (1)$$

(прямые $y = kx + b$ параллельны прямой $y = kx$). Выберем на прямой (1) точку M, лежащую в правой полуплоскости, с координатами (x, kx) и рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 148). Этот вектор имеет то же направление, что и прямая, и, следовательно, образует с осью абсцисс тот же

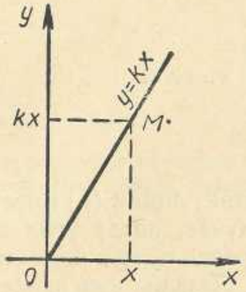

Рис. 148

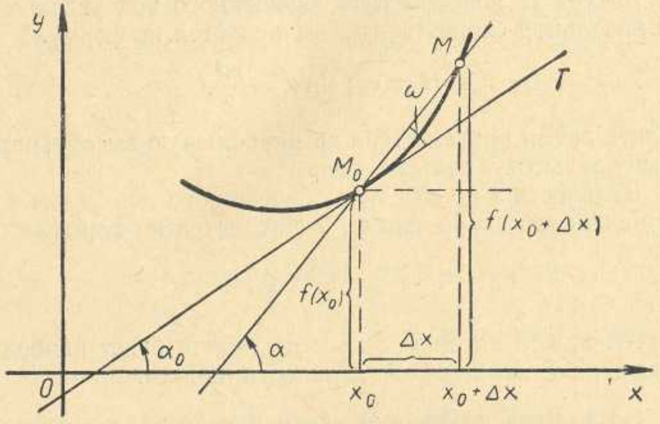

Рис 149

угол α. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx}{x} = k$, что и требовалось доказать.

Теперь мы можем восполнить пробелы в рассуждениях п. 80, посвященного применению производной к нахождению касательных.

Касательная M_0T к линии (L) была определена как проходящая через точку M_0 прямая, угол которой с секущей M_0M стремится к нулю, когда точка M стремится вдоль этой линии к точке M_0. При этом угол между прямыми понимался в обычном смысле как меньший из двух углов, которые образуют две прямые линии, и, следовательно, этот угол острый (неотрицательный). Обозначим этот угол через ω, угол наклона касательной — через α_0, а угол наклона секущей — через α. Тогда (рис. 149)

$$\omega = |\alpha - \alpha_0|.$$

Согласно определению линия (L) имеет в точке M_0 касательную M_0T, если

$$\lim_{M \to M_0} \omega = 0,$$

т. е. если

$$\lim_{M \to M_0} \alpha = \alpha_0.$$

Итак, линия (L) имеет в точке M_0 касательную в том и только в том случае, когда угол наклона α секущей M_0M имеет определенный предел α_0 при стремлении точки M к точке M_0 вдоль этой линии.

Теперь уже совсем просто можно доказать два предложения, которые не были доказаны в п. 80.

1. *Если график функции f имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ невертикальную касательную, то функция f имеет в точке x_0 производную*

$$f'(x_0) = k_0,$$

где k_0 — угловой коэффициент касательной.

Доказательство. Если α — угол наклона секущей M_0M (рис. 149), а α_0 — угол наклона касательной M_0T к оси абсцисс, то

$$\lim_{M \to M_0} \alpha = \alpha_0.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \alpha_0.$$

Пусть k — угловой коэффициент секущей. В силу непрерывности функции $\operatorname{tg} x$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} k = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha_0 = k_0,$$

и так как

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то тем самым доказано существование предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

а следовательно, и существование в точке x_0 производной

$$f'(x_0) = k_0.$$

2. *Если функция f имеет в точке x_0 производную, то ее график имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ невертикальную касательную, угловой коэффициент которой $k_0 = f'(x_0)$.*

Доказательство. По условию теоремы существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (2)$$

Проведем через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ прямую M_0T с угловым коэффициентом

$$k_0 = f'(x_0).$$

Равенство (2) означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} k = k_0. \qquad (3)$$

Так как функция $\operatorname{tg}\alpha$ непрерывна и строго возрастает в интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, то для нее существует обратная ей функция $\alpha(k)$, непрерывная на множестве значений функции $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. на всей действительной прямой. Но тогда из равенства (3) вытекает существование предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \alpha_0,$$

а это и означает, что прямая M_0T является касательной к графику данной функции в точке M_0.

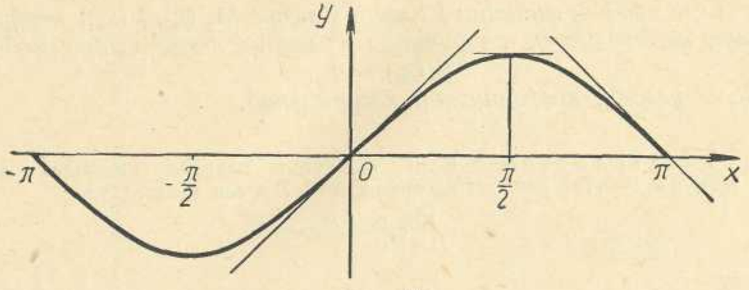

Рис. 150

Пример 1. Найти касательные к синусоиде $y = \sin x$ в точках с абсциссами: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$ (рис. 150).

Решение. Для решения задачи достаточно найти угловые коэффициенты касательных, а следовательно, и углы их наклона к оси абсцисс:

$$k_1 = (\sin x)'\,|_{x=0} = \cos 0 = 1,\ \operatorname{tg}\alpha_1 = 1.$$

Следовательно, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$.

$$k_2 = (\sin x)'\,\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \operatorname{tg}\alpha_2 = 0.$$

Следовательно, $\alpha_2 = 0$.

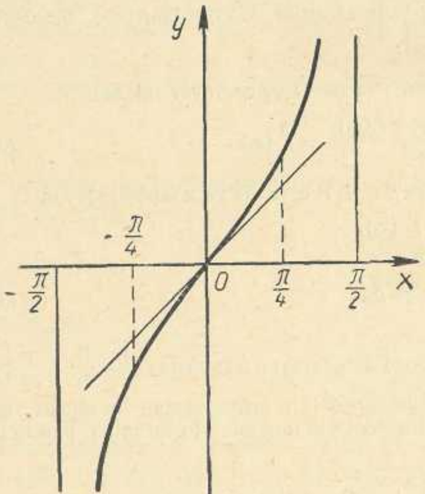

Рис. 151

$$k_3 = (\sin x)'\,|_{x=\pi} = \cos\pi = -1,\ \operatorname{tg}\alpha_3 = -1.$$

Следовательно, $\alpha_3 = -\frac{\pi}{4}$.

Замечание. В точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$ касательные пересекают график функции. Такие точки называют *точками перегиба* функции.

Пример 2. Найти касательные к графику функции $\operatorname{tg} x$ в точках с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

Решение. $k_1 = (\operatorname{tg} x)'|_{x=0} = \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=0} = 1$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$.

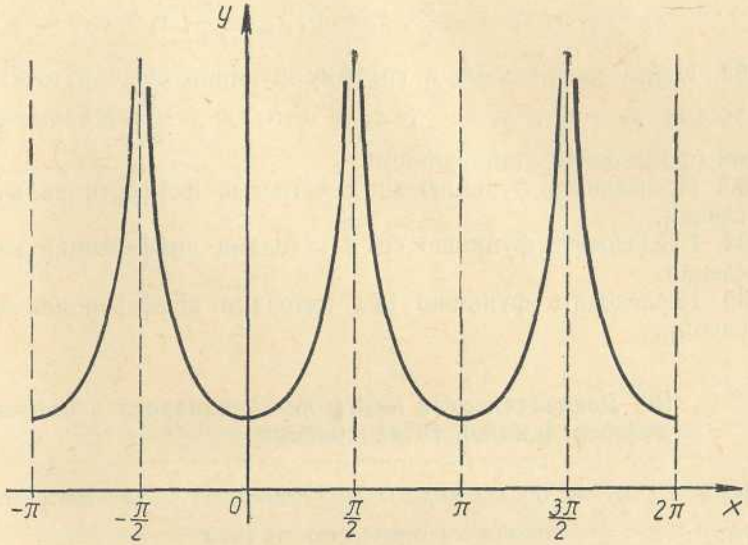

Рис. 152

$$k_2 = (\operatorname{tg} x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2,\ \operatorname{tg}\alpha_2 = 2.$$

В точке O касательная пересекает график функции, эта точка является точкой перегиба функции $\operatorname{tg} x$ (рис. 151).

Изменение углового коэффициента касательной к графику функции $\operatorname{tg} x$ можно проследить по графику ее производной (рис. 152):

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Так как функция $\cos x$ в интервале $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$ строго возрастает, а в интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ строго убывает, то производная $\frac{1}{\cos^2 x}$ функции $\operatorname{tg} x$ в интервале $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$ строго убывает от $+\infty$ до 1, а в интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ строго возрастает от 1 до $+\infty$.

Упражнения

830. Найти касательные к синусоиде $y = \sin x$ в точках с абсциссами

$$x_1 = -\pi,\ x_2 = -\frac{\pi}{2},\ x_3 = 2\pi.$$

831. Найти касательные к графику функции $\cos x$ в точках с абсциссами

$$x_1 = -\pi,\ x_2 = -\frac{\pi}{2},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{\pi}{2},\ x_5 = \pi.$$

832. Найти касательные к графику функции $\operatorname{ctg} x$ в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}\pi$, $x_4 = \frac{3}{2}\pi$ и нарисовать график производной этой функции.

833. Исследовать функцию $\sin x$ методами дифференциального исчисления.

834. Исследовать функцию $\cos x$ методами дифференциального исчисления.

835. Исследовать функцию $\operatorname{tg} x$ методами дифференциального исчисления.

119. Доказательство некоторых неравенств с помощью дифференциального исчисления

Нам уже известно, что для всех значений переменной x, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, выполняется неравенство $\sin x \leqslant x$. (1)

Для этих же значений переменной x выполняются также и следующие неравенства:

$$\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}; \quad (2) \qquad \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}; \quad (4)$$

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!}; \quad (3) \qquad \sin x \leqslant 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \quad (5)$$

Для доказательства неравенства (2) рассмотрим функцию

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Так как $f'(x) = -\sin x + x = 0$ для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то функция f возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, и так как $f(0) = 0$, то для всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) \geqslant 0, \text{ т. е. } \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0,$$

что равносильно неравенству (2).

Аналогично доказываются неравенства (3), (4), (5).

Упражнения

Доказать следующие неравенства:

836. $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$. **837.** $\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

838. $\sin x \leqslant 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пятизначные таблицы логарифмов факториалов

n	$\lg n!$	n	$\lg n!$	n	$\lg n!$
1	0,00000	35	40,01423	69	98,23331
2	0,30103	36	41,57054	70	100,07841
3	0,77815	37	43,13874	71	101,92966
4	1,38021	38	44,71852	72	103,78700
5	2,07918	39	46,30958	73	105,65032
6	2,85733	40	47,91164	74	107,51955
7	3,70243	41	49,52443	75	109,39461
8	4,60552	42	51,14768	76	111,27543
9	5,55976	43	52,78115	77	113,16192
10	6,55976	44	54,42460	78	115,05401
11	7,60116	45	56,07781	79	116,95164
12	8,68034	46	57,74057	80	118,85473
13	9,79428	47	59,41267	81	120,76321
14	10,94041	48	61,09391	82	122,67703
15	12,11650	49	62,78410	83	124,59610
16	13,32062	50	64,48307	84	126,52038
17	14,55107	51	66,19065	85	128,44980
18	15,80634	52	67,90665	86	130,38430
19	17,08509	53	69,63092	87	132,32382
20	18,38612	54	71,36332	88	134,26830
21	19,70834	55	73,10368	89	136,21769
22	21,05077	56	74,85187	90	138,17194
23	22,41249	57	76,60774	91	140,13098
24	23,79271	58	78,37117	92	142,09477
25	25,19065	59	80,14202	93	144,06325
26	26,60562	60	81,92017	94	146,03638
27	28,03698	61	83,70550	95	148,01410
28	29,48414	62	85,49790	96	149,99637
29	30,94654	63	87,29724	97	151,98314
30	32,42366	64	89,10342	98	153,97437
31	33,91502	65	90,91633	99	155,97000
32	35,42017	66	92,73587	100	157,97000
33	36,93869	67	94,56195	101	159,97433
34	38,47016	68	96,39446	102	161,98293

n	$\lg n!$	n	$\lg n!$	n	$\lg n!$
103	163,99576	143	247,58595	183	336,08317
104	166,01280	144	249,74432	184	338,34799
105	168,03399	145	251,90568	185	340,61516
106	170,05929	146	254,07004	186	342,88467
107	172,08867	147	256,23735	187	345,15652
108	174,12210	148	258,40762	188	347,43067
109	176,15953	149	260,58080	189	349,70714
110	178,20092	150	262,75689	190	351,98589
111	180,24624	151	264,93587	191	354,26692
112	182,29546	152	267,11771	192	356,55022
113	184,34854	153	269,30241	193	358,83578
114	186,40544	154	271,48993	194	361,12358
115	188,46614	155	273,68026	195	363,41362
116	190,53060	156	275,87338	196	365,70587
117	192,59878	157	278,06928	197	368,00034
118	194,67067	158	280,26794	198	370,29701
119	196,74621	159	282,46934	199	372,59586
120	198,82539	160	284,67346	200	374,89689
121	200,90818	161	286,88028	201	377,20008
122	202,99454	162	289,08980	202	379,50544
123	205,08444	163	291,30198	203	381,81293
124	207,17787	164	293,51683	204	384,12256
125	209,27478	165	295,73431	205	386,43432
126	211,37515	166	297,95442	206	388,74818
127	213,47895	167	300,17714	207	391,06415
128	215,58616	168	302,40245	208	393,38222
129	217,69675	169	304,63033	209	395,70236
130	219,81069	170	306,86078	210	398,02458
131	221,92796	171	309,09378	211	400,34880
132	224,04854	172	311,32931	212	402,67520
133	226,17239	173	313,56735	213	405,00358
134	228,29949	174	315,80790	214	407,33399
135	230,42983	175	318,05094	215	409,66643
136	232,56337	176	320,29645	216	412,00089
137	234,70009	177	322,54443	217	414,33735
138	236,83997	178	324,97485	218	416,67581
139	238,98298	179	327,04770	219	419,01625
140	241,12911	180	329,30297	220	421,35867
141	243,27833	181	331,56065		
142	245,43062	182	333,82072		

Ответы и указания к упражнениям

15. Предварительно следует доказать, что n точек, расположенных на прямой, делят ее на $n+1$ частей. Если $n = 1$, то $S_1 = 1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$, т. е. одна прямая делит плоскость на две части. Пусть утверждение верно при $n = k$, т. е. $S_k = 1 + \frac{k(k+1)}{2}$. Если добавим еще одну прямую, то k первых прямых пересекут ее в k точках и потому разделят ее на $k+1$ частей. Каждая из этих частей разбивает одну из имевшихся частей плоскости на две части, и тем самым к первым S_k частям плоскости добавятся еще $k+1$ частей, т. е.

$$S_{k+1} = 1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

16. а) Если $n = 1$, то получаем: $S_1 = \frac{(1+1)(1^2-1+6)}{6} = 2$, т. е. в этом случае теорема верна. Пусть теорема верна при $n = k$, т. е. мы предполагаем, что k плоскостей указанного вида делят пространство на $S_k = \frac{(k+1)(k^2-k+6)}{6}$ частей. Эти k плоскостей разделят добавленную $(k+1)$-ю плоскость на $\frac{k^2+k+2}{2}$ частей (упр. 15). Каждая часть плоскости разделит одну из имевшихся частей пространства на две части, и потому при добавлении $(k+1)$-й плоскости будет добавлено к S_k частям пространства еще $\frac{k^2+k+2}{2}$ части, т. е.

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k^2-k+6)}{6} + \frac{k^2+k+2}{2} = \frac{(k+2)(k^2+k+6)}{6}.$$

б) При $n = 1$ имеем: $S_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$ (окружность делит плоскость на две части). При $n = k$ предположим, что любые две из k окружностей пересекаются и никакие три из них не имеют общей точки, и пусть для этих k окружностей теорема верна, т. е. они делят плоскость на $k^2 - k + 2$ частей. Если все эти k окружностей пересекут добавленную к ним окружность так, что опять никакие три не будут иметь общей точки, то добавленный круг будет разделен на $2k$ частей. Поэтому к S_k будет добавлено $2k$, т. е. $S_{k+1} = k^2 - k + 2 + 2k = k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2$. Если же не всякие две окружности пересекаются или какие-либо три окружности имеют общую точку, то полученное число частей плоскости будет меньше, чем $n^2 - n + 2$.

20. Из неравенства $\sqrt{2}+1>2$ следует $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, т. е. данное неравенство справедливо при $n=2$. Пусть это неравенство справедливо при $n=k\geqslant 2$, тогда при $n=k+1$ получим:

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}\left(\sqrt{\frac{k}{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=\sqrt{k+1}\left(\frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{k+1}\right)>\sqrt{k+1}.$$

21. См. неравенство Бернулли в п. 4.

30. 6. **31.** $n=7$. **32.** 106 656. **33.** а) 24; б) 24; в) 144; г) 3600; д) 720. **34.** $28\cdot 29!$.

39. а) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!\,(n-k-3)!}$; б) $\frac{(m+n)!}{(n+1)!\,(m-1)!}$; в) $\frac{(m+n)!}{(n-2)!\,(m+2)!}$.

40. 45. **41.** 54. **42.** 120. **43.** 14. **44.** 7. **45.** $k<\frac{n+1}{2}$. **46.** 15. **47.** 21. **48.** 945. **49.** 1365. **50.** 52 360. **51.** 2.

52. Указание: применить формулу (6) из п. 10.

53. 512. **54.** 1024.

55. Указание: сложить почленно равенства $C_{10}^{10}=C_9^9$, $C_{11}^{10}=C_{10}^9+C_{10}^{10}$, $C_{12}^{10}=C_{11}^9+C_{11}^{10}$, ..., $C_{20}^{10}=C_{19}^9+C_{19}^{10}$, $C_{21}^{10}=C_{20}^9+C_{20}^{10}$.

57. а) $\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}=\frac{100!}{2^{100}(50!)^2}$. Вычисление производим по таблице логарифмов факториалов (см. приложение); б) $\approx 0{,}74$. Указание: применить формулу $C_n^m=C_n^{n-m}$ и затем с помощью таблицы логарифмов факториалов найти сумму шести слагаемых, например:

$$\frac{C_{100}^{45}+C_{100}^{55}}{2^{100}}=\frac{2C_{100}^{45}}{2^{100}}=\frac{2\cdot 100!}{45!\,55!\,2^{100}}\approx 0{,}09695.$$

58. а) $C_{10}^{50}\frac{5^{50}\cdot 5^{50}}{10^{100}}=\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}\approx 0{,}08$; б) $C_{100}^{45}\frac{5^{45}\cdot 5^{55}}{10^{100}}+C_{100}^{46}\frac{5^{46}\cdot 5^{54}}{10^{100}}+\ldots+C\frac{5^{55}5^{45}}{10^{100}}=\frac{C_{100}^{45}+C_{100}^{46}+\ldots+C_{100}^{55}}{2^{100}}\approx 0{,}74.$

59. Всех различных стозначных чисел 10^{100}. Из них содержит не более 30 четных десятичных знаков $C_{100}^1+C_{100}^2+\ldots+C_{100}^{30}$. Столько же будет чисел, содержащих не менее 70 четных знаков, так как $C_{100}^{70}+C_{100}^{71}+\ldots+C_{100}^{100}=C_{100}^1+C_{100}^2+\ldots+C_{100}^{30}$. Остается показать, что $(C_{100}^1+C_{100}^2+\ldots+C_{100}^{30})\cdot\frac{1}{2^{100}}<0{,}001$. Это можно сделать с помощью таблицы логарифмов факториалов.

60. 0,0605. **61.** 3024. **62.** 15. **63.** 1190 **64.** 969.

65. 240 400 160. **66.** $n=9$, $n=10$.

67. $n=6$. **68.** $x=5$. **69.** $x=7$. **71.** $k_2=-448$, $k_5=280$, $k_6=-84$. **72.** $T_{16}=-C_{31}^{15}a^{15}x^{63}$, $T_{17}=C_{31}^{16}a^{16}x^{61}$. **73.** $T_6=\frac{495a^4}{x^2}$. **74.** $T_4=84x^4$. **75.** $T_7=C_{16}^6x^3$. **76.** $T_1=x^{-6}$, $T_7=C_{12}^6x^{-1}$, $T_{13}=x^3$. **77.** $T_3=60$. **78.** 26.

79. $T_1=x^4$, $T_5=105\,x$, $T_9=\frac{1}{256}x^{-2}$. **80.** а) 51; б) 34; в) 11. **81.** $(1+0{,}01)^{10}=1+0{,}0045+0{,}00012+0{,}0000021+\ldots$ а) достаточно трех членов; б) достаточно пяти членов.

82. T_k при $k=6,\ 7,\ 8,\ 9$. **83.** $n=13$. **84.** C_{17}^5. **85.** $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$, $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{36}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{11}{36}$.

86. $\frac{2\cdot 6!}{7!}=\frac{1}{4}$. **87.** $\frac{4+3+2+1}{5\cdot 4}=0{,}5$. **88.** $\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$.

89. 0. **90.** $\frac{5\cdot 3}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$ **91.** $\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$. **92.** $\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$.

93. а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{7}{9}$. **94.** $\frac{C_{20}^2}{C_6^2}\approx 0{,}692$.

95. $p=\frac{C_k^lC_{r-k}^{s-l}}{C_r^s}$. **96.** $n=C_{16}^8$; а) $m=2C_{14}^6$, $p=\frac{7}{15}$; б) $m=C_2^1C_{14}^7$, $p=\frac{8}{15}$. **97.** $\frac{A_6^k}{6^k}$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$.

98. $\frac{11}{30}\approx 0{,}367$. Решение. Решим задачу в самом общем виде, т. е. для любого натурального числа n. Пусть $(a_1, a_2, \ldots .a_n)$ — перестановка из n элементов (чисел от 1 до n). Назовем перестановку беспорядком, если $a_i\neq i$, т. е. для всех $i=1, 2, 3, \ldots, n$ на i-м месте стоит число $a_i\neq i$. Другими словами, в беспорядке ни один элемент не занимает своего первоначального места. Пусть D_n обозначает число всех беспорядков из n элементов. Подсчитаем это число. Очевидно, что $D_1=0$, $D_2=1$. Первое место в беспорядке может быть занято любым элементом, исключая первый элемент, т. е. $n-1$ элементом. Если первое место займет число $k\neq 1$, то все беспорядки можно разбить на две группы в зависимости от того, займет ли первый элемент k-е место или нет. Если первый элемент займет k-е место, то число беспорядков в этом случае равно числу беспорядков, образованных $(n-2)$-мя элементами, т. е. D_{n-2}. Если же первый элемент не будет занимать k-го места, то беспорядки будут такими, что в них элементы $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ занимают места от 2-го до n-го и, следовательно, их число равно D_{n-1}. Таким образом, когда число k занимает первое место, то будем иметь всего $D_{n-1}+D_{n-2}$ беспорядков. А так как k может принимать $n-1$ различных значений, то всех беспорядков из n элементов будет $(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$. Из этой формулы последовательно получаем:
$D_3=2(D_2+D_1)=2(1+0)=2$, $D_4=3(2+1)=9$, $D_5=4(9+2)=44$, $D_6=5(44+9)=265$, $D_7=1854$.
Следовательно, вероятность того, что 5 гостей наденут каждый чужую шляпу, равна $\frac{D_5}{5!}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}\approx 0{,}367$. **99.** $\frac{103}{280}\approx 0{,}368$. **100.** $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geqslant 0{,}9$ и поэтому $n\geqslant\frac{1}{\lg 2}$, т. е. $n>3$. **101.** а) $C_{100}^{50}\cdot\frac{1}{2^{100}}\approx 0{,}08$; б) $(C_{100}^{45}+C_{100}^{46}+\ldots+C_{100}^{55})\cdot\frac{1}{2^{100}}\approx 0{,}745$; в) $(C_{100}^1+C_{100}^2+\ldots+C_{100}^{10})\cdot\frac{1}{2^{100}}$.

102. Решение. В разложении $(a+b+c)^n=[a+(b+c)]^{k+l+m}$ член, содержащий a^k, имеет вид: $C_{k+l+m}^{l+m}a^k(b+c)^{l+m}$. А в разложении $(b+c)^{l+m}$ член, содержащий b^lc^m, имеет вид: $C^m_{l+m}b^lc^m$. Следовательно, коэффициент при $a^kb^lc^m$ равен: $C^{l+m}_{k+l+m}\cdot C^m_{l+m} = \frac{(k+l+m)!\,(l+m)!}{k!\,(l+m)!\,l!m!} = \frac{n!}{k!l!m!}$.

103. 252 (использовать формулу задачи 102). 104. Р е ш е н и е. Одно подмножество, содержащее m_1 элементов, можно выбрать $C_n^{m_1}$ способами. Из оставшихся $n-m_1$ элементов можно выделить подмножество, содержащее m_2 элементов, $C^{m_2}_{n-m_1}$ способами и т. д. Поэтому число всех способов выбора k попарно не пересекающихся подмножеств, удовлетворяющих указанному в задаче условию, равно:

$$C_n^{m_1}\cdot C^{m_2}_{n-m_1}\cdot C^{m_3}_{n-m_1-m_2}\cdot\ldots\cdot C^{m_{k-1}}_{n-m_1-m_2-\ldots-m_{k-2}} = \frac{n!}{m_1!m_2!m_3!\ldots m_k!}.$$

114. $x_n=5n-2$. 117. г) $x_n = 3\cdot 2^{n-1}$. 119. $x_{24}=\frac{1}{12}$, $x_{2n}=\frac{2}{n}$, $x_{2n+1}=0$. 124. $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{7}{4}$, $x_3=\frac{15}{8}$, $x_{100}=2-\frac{1}{2^{100}}$. 127. а) $x_n=\frac{1}{4+3(n-1)}$; в) $y_n=\frac{n}{2^n}$; г) $z_n=\frac{n}{100(n-1)+1}$. 129. $x_n=3\cdot 2^{n-1}$. 130*. $x_n = 1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1} = \begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четно},\\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно.}\end{cases}$ 131*. $x_n = 4-\frac{1}{2^{n-2}}$, $n=1, 2, \ldots$ У к а з а н и е: выписать несколько первых членов последовательности, заметить закон их образования и доказать его справедливость методом математической индукции. 132*. Если $b\neq 0$, то $x_n=\frac{a(1-b^n)}{1-b}$, $n=1, 2, \ldots$

137. а) строго убывает; б) строго возрастает; г) строго убывает. 141. У к а з а н и е: последовательность $y_n=\frac{n^2}{n^2+3}+1$, $n=1,2,\ldots$, строго возрастает.

149. $a\geqslant 2b$, $a>2b$, $a\leqslant 2b$, $a<2b$. У к а з а н и е: рассмотреть разность $x_{n+1}-x_n$, $n=1, 2, \ldots$

153*. У к а з а н и е: среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел:

$$\frac{x_n+y_n}{2}\geqslant\sqrt{x_ny_n}.$$

154*. Р е ш е н и е.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} =$$

$$= \left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1}=1.$$

Мы использовали неравенство Бернулли.

157*. Все последовательности ограничены и снизу и сверху.

159. У к а з а н и е: воспользоваться методом математической индукции.

164*. У к а з а н и е: воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}\quad\text{при}\quad k>1.$$

165*. У к а з а н и е: воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{k2^{k-1}}\leqslant\frac{1}{2\cdot 2^{k-1}}=\frac{1}{2^k}\quad\text{при}\quad k>1.$$

166*. У к а з а н и е: $x_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

184*. У к а з а н и е: $\frac{3n-4}{2n^2+n+2}<\frac{3n}{2n^2+n}=\frac{3}{2n+1}$.

188. а) сходится; б) расходится; в) сходится.

193*. Р е ш е н и е. Пусть ε таково, что $a+\varepsilon<q$. Такое ε непременно существует. Найдется номер n_1 такой, что $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ при всех $n>n_1$. Это и значит, что $x_n<q$ при $n>n_1$.

195*. Р е ш е н и е. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$. Допустим, что утверждение неверно, т. е. предположим, что $a>b$. Тогда найдется число c такое, что $a>c>b$. Согласно упр. 193* и 194* найдется n_0 такое, что при всех $n>n_0$ $x_n>c$ и $y_n<c$. Следовательно, для этих n $x_n>y_n$ вопреки условиям задачи.

201. б) $\left(5,\ 1,\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{125},\ldots\right)$. 203. $|x|<1$, $S=\frac{1}{1-x^2}$.

206. а) $-2<x<0$, $S(x)=-1-\frac{1}{x}$; б) при $x<-\frac{1}{2}$ $S(x)=-\frac{x(1+x)}{2x+1}$; в) при $|x|>\frac{1}{2}$ $S(x)=\frac{1}{2x-1}$; г) при $x<0$ и при $x>2$ $S(x)=\frac{1}{x-2}$.

209. $q=-\frac{1}{3}$. 223*. Р е ш е н и е. Пусть число n не является квадратом натурального числа, и предположим, что существует рациональное число $r=\frac{p}{q}$ такое, что $n=\frac{p^2}{q^2}$. Будем считать дробь $\frac{p}{q}$ *несократимой*. Имеем: $nq^2=p^2$. Пусть число p представляется в виде следующего произведения простых множителей: $p=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}$. Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то среди простых множителей числа q нет ни одного простого множителя числа p. Поэтому все простые множители числа n содержатся среди множителей числа $p^2=\left(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}\right)^2$. Например, может быть, что $n=\left(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}\right)^2$. Но тогда число n является квадратом натурального числа, что противоречит условию теоремы 2.

235. Нет. Такое число может быть и бесконечной периодической десятичной дробью.

241. Если предположить, что число $\alpha-r$ рационально, то $(\alpha-r)+r=\alpha$ должно также быть рациональным, но это противоречит условию задачи.

250. Нет. Последовательность (b_n) может расходиться, но если она ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$.

255. а) -2; б) $\frac{6}{7}$. 258. а) 1; б) $-\frac{3}{4}$.

262. 0. 265. $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$. 267. $\frac{5}{3}\cdot 2=\frac{10}{3}$.

270. $\frac{4}{3}$. 272. $\frac{3}{4}$. 273*. 0 при $|c|<1$; $\frac{1}{2}$ при $c=1$; 1 при $|c|>1$.

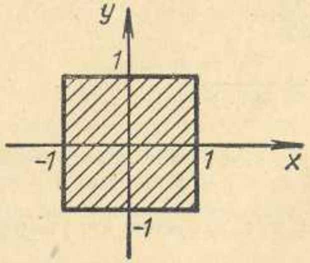

Рис. 153

277. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3}$. 279. Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2-(n^2-4n-1)}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-4n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-4n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}}=3.$$

284. Указание: $|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|=\frac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}<\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}$.

285. При $|b|<1$. Указание: докажите, что $x_n=1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}$.

288. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}ab$. 289*. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{8}{3}$.

297. Указание: $y_n<y_{n+1}$ и $y_n=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}<2$.

300*. Указание: $v_n<v_{n+1}$ и $v_n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$.

307. Квадрат (рис. 153). 309. Окружность с центром в точке (1, 2) и радиуса $r=2$. 310. Четыре точки $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$.

323. $f(x+h)=(x+h)^3$, $f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3=h(3x^2+3hx+h^2)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+3hx+h^2$.

324. $\frac{f(x+h)-2f(x)-f(x-h)}{h^2}=\frac{(x+h)^2-2x^2+(x-h)^2}{h^2}=2$.

330. $D(F)=\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

333. $D(g)=\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. 335. $D(f)=[-1; +1]$.

336. $D(f)=\{2\}$, $D(g)=[2; 4]$. 338. $D(g)=[-2; 1]$.
340. $f\neq\varphi$, так как $D(f)\neq D(\varphi)$.

346. $S(x)=\begin{cases}a^2-x^2 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\frac{a\sqrt{2}}{2},\\ (a\sqrt{2}-x)^2 & \text{при } \frac{a\sqrt{2}}{2}<x\leqslant a\sqrt{2}.\end{cases}$

351. $f(0)=-\frac{2}{3}$, $f(1)=1$, $f(a^2+1)=\frac{5}{3}a^2-1$, $f(x-1)=\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}$, $g(x)=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$, $g(1)=1$, $g(5)=\frac{17}{5}$.

357. $f(-x)=f(x)$ и $D(f)=[-a, a]$, где $a>0$.

369. f возрастает в промежутке $[2; +\infty[$ и убывает в $]-\infty; 2[$, g возрастает в $]-\infty; 3]$ и убывает в $]3, +\infty[$.

373. f возрастает в $D(f)=[0; +\infty[$.
383. $2ax_0+b+a\Delta x$.

399*. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$. Тогда $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где α и β — б. м.,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}=\frac{A}{B}+\left[\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}\right].$$

Теперь достаточно доказать, что функция $\gamma=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{1}{Bg(x)}(B\alpha-A\beta)$ является бесконечно малой в окрестности точки a. Так как $(B\alpha-A\beta)$ — б. м., то достаточно доказать, что функция $\frac{1}{Bg(x)}$ ограничена. Предположим, для определенности, что $B>0$ и пусть $B>C>0$. Тогда в некоторой окрестности точки a $g(x)>C$, $\frac{1}{g(x)}<\frac{1}{C}$ и $0<\frac{1}{Bg(x)}<\frac{1}{BC}$.

404. 1. 405. 2. 407. $\frac{4}{3}$. 410. 0,25. 412. $\frac{1}{12}$.

414. $\frac{1}{9}$ 417. 3. 419. $\frac{1}{12}$. 421. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 423. 1,5.

426. $6t_0^2-6t_0$. 429. а) $-\frac{3}{4}\,\frac{м}{сек}$; б) $-12\,\frac{м}{сек}$; в) $-\frac{3}{(t_0-2)^2}\,\frac{м}{сек}$.

436. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 441. $g'(x)=6x^2+6x-2$.

448. а) 1; б) 0. 461. $a(cx^2+dr+r)+(ax+b)(2cx+d)$. 463. $g'(0)=12$, $g'(-1)=-48$, $g'(1)=72$.

467. $f'(t)=\frac{6t^2+2t}{(1+6t)^2}$ 470. $f'(t)=\frac{3}{(t+1)^2}$.

477. $f'(x)=2+\frac{3}{x^2}=\frac{2x^2+3}{x^2}$. 480. $f'(x)=-\frac{8}{x^5}-\frac{15}{x^6}$.

483. $f'(y)=\frac{-3y^4+4y^3-4y+15}{y^6}$.

487. $h'(x)=\frac{-3x^4-8x^2-1}{x^2(3x^2+1)^2}$. 490. $f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

493. $g'(t)=\frac{4t^3-3t^2+2t}{2\sqrt{t^4-t^3+t^2-1}}$. 500. б) $f[g(x)]=\sqrt{x}$, область определения: $[0, +\infty[$, $g(f(x))=\sqrt{|x|}$, область определения: R.

502*. Решение. б) $|g(x)| \leqslant 1$ при $(|x^2-2| \leqslant 1) \Leftrightarrow (-1 \leqslant x^2-2 \leqslant 1) \Leftrightarrow (1 \leqslant x^2 \leqslant 3) \Leftrightarrow (1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}) \Leftrightarrow (-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -1$ или $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3})$. При этих значениях x $f(g(x)) = 1$. При всех остальных x $f(g(x)) = 0$.

503. в) Решение. $\left(-1 \leqslant \frac{|x|}{x} \leqslant 0\right) \Leftrightarrow (x < 0)$; г) Решение. $(-1 \leqslant 2x \leqslant 0) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0\right)$.

506. а) $f'(x) = \frac{20}{3}(2x+7)\sqrt[3]{(x^2+7x+1)^{17}}$.

507. $$f'(x) = \frac{(1+3\sqrt[3]{x^2})(x^2+5x) - 3(2x+5)(x+\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}(x^2+5x)^4}.$$

510. Решение. Если $x_1 \in [-1, 0]$, $x_2 \in [-1, 0]$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то $(1 - x_1 = 1 - x_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2)$. Аналогично если $x_1 \in]0; 2]$, $x_2 \in]0; 2]$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то $-2x_1 = -2x_2$ и $x_1 = x_2$. Если же $x_1 \in [-1; 0]$, а $x_2 \in [0; 2]$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Следовательно, функция f обратима. Для $x \in [-1; 0]$ решим уравнение $y = 1 - x$. Тогда $x = 1 - y$ для $1 \leqslant y = 1 - x \leqslant 2$. Следовательно, $f^{-1}(y) = 1 - y$ для $y \in [1; 2]$. Аналогично, решая уравнение $y = -2x$ для $x \in]0; 2]$, найдем $x = -\frac{1}{2}y$ для $-4 \leqslant y = -2x < 0$.

Итак,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x \text{ при } -4 \leqslant x < 0, \\ 1 - x \text{ при } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

513. $f^{-1}(x) = \frac{4(1-x)}{1+x}$ при $x \neq -1$.

516. Так как функция $y \mapsto y^3 + y$ строго возрастает, то она имеет обратную и, следовательно, уравнение $y^3 + y = x$ функционально по переменной y на всем $\mathbb{R}$.

517*. Если функция g обратна функции f, то $f[g(x)] = x$. Поэтому $f'[g(x)]\,g'(x) = 1$ и $g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$, если, конечно, $f'[g(x)] \neq 0$.

519. $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ и $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

523. $f(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{4}} - t^{-\frac{1}{12}}$ и $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt[4]{t}} + \frac{1}{12t\sqrt[12]{t}}$.

527. $y = 12x - 16$. **528.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

536. б) g возрастает (строго возрастает) в интервалах $]-\infty; 0]$ и $[2; +\infty[$, убывает в интервале $]0; 2[$.

540. y строго возрастает в интервалах $]-\infty; -1[$, $[1; +\infty[$, строго убывает в $]-1; 1[$.

542. g строго возрастает в интервале $[1; +\infty[$, строго убывает в интервале $]0; 1[$.

546. а) $f_{\min} = f(1) = 110$; $f_{\max} = f(-3) = 174$; б) $y_{\min} = y(1) = -1$.

547. а) $f_{\min} = f(0) = 0$; б) экстремумов не имеет.

550. $g_{\min} = g(2) = 2$, $g_{\max} = g(0) = 2$.

553. $y_{\max} = y(0) = \frac{2}{\sqrt{2}}$. **564.** $x < 1$ или $x > 2$.

568. $-\frac{1}{3} < x < 1$. **574.** f строго возрастает в интервалах $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$, строго убывает в интервале $]-1, +1[$, $f_{\min} = f(1) = -1$, $f_{\max} = f(-1) = 3$.

581. y строго возрастает в интервале $]\frac{3}{2}; +\infty[$, строго убывает в интервале $]-\infty; \frac{3}{2}[$, $y_{\min} = y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{16}$.

584. а) $h_{\text{наим}} = h(-1) = -9$, $h_{\text{наиб}} = h(0) = 3$.

591. $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$, где $a > 0$ — данное число.

593. Равносторонний. **597.** $8 = 4 + 4$. **599.** 4 *см*. **603.** 15 *м/сек*. **605.** 6, 4 *км/ч*.

610. $v = \frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$, $w = \frac{100}{(25-4t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

614. Если $Q(t)$ — количество реагирующего вещества в момент времени t, то $\frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}$ является средней скоростью реагирования вещества за промежуток времени от момента t до момента времени $t + \Delta t$, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = Q'(t)$, если этот предел существует, является скоростью реагирования вещества.

620. $y''(x) = 6x - 10$. **623.** $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$.

628. $\approx 0{,}13$ *см²/сек*. **633.** 50°, 90°, 100°, 120°; $\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}$. **634.** 67°30′, 78°45′, 101°15′, 135°, 157°30′, $\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}$. **635.** 10 *рад/сек*.

637. $\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{25\pi}{4}, \frac{125\pi}{8}, \frac{41\pi}{2}$.

639. 142°30′, 127°30′, 105°, 90°, 75°; $\frac{19\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{12}$.

644. 4π *см*. **647.** $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}, -\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$.

654. $-\cos^2\alpha$. **655.** 1. **656.** 2. **657.** $\sin^2\alpha$. **658.** 1. **659.** 0. **660.** 1. **661.** $\sin\alpha - \cos\alpha$. **662.** 1. **663.** 0. **666.** $2\cos\alpha$. **667.** $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **668.** $\cos^2\alpha$. **669.** $2\cos^2\alpha$. **670.** 1. **671.** $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **672.** $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$. **679.** $\operatorname{ctg}^6\alpha$.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
694.	$\frac{5}{13}$	$-\frac{12}{13}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{12}{5}$
695.	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$

696.	$-\frac{9}{41}$	$-\frac{40}{41}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{40}{9}$
697.	$\frac{15}{17}$	$-\frac{8}{17}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{8}{15}$
698.	$-\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$
699.	$-\frac{\sqrt{11}}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{11}}{5}$	$\frac{5\sqrt{11}}{11}$

707. $\cos 35°$. **708.** $\sin 35°$. **709.** $-\operatorname{tg} 31°$. **710.** $-\operatorname{tg} 33°$. **711.** $-\sin 25°$. **712.** $-\sin 16°$. **713.** $\operatorname{tg} 41°$. **714.** $\operatorname{ctg} 7°$. **725.** $x_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{6}$, $x_2 = 2\pi n + \frac{5\pi}{6}$.

726. $x_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{6}$, $x_2 = 2\pi n + \frac{5\pi}{6}$. **727.** $x_1 = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = 2\pi n \pm 2{,}3$.

728. $x = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$. **729.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pi n + \frac{\pi}{4}$.

730. $x \approx 2\pi n \pm 0{,}88$. **731.** $x_1 = \pi n + \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 2\pi n + \frac{\pi}{6}$, $x_3 = 2\pi n + \frac{5\pi}{6}$.

732. $x = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}$. **733.** $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$. **734.** $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$.

735. $x_1 \approx \pi n + 0{,}47$, $x_2 \approx \pi n - 0{,}69$. **736.** $x_1 = \pi n + \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \pi n + 0{,}98$.

737. $x = \pi n \pm \frac{\pi}{4}$. **738.** $x_1 = \pi n + \frac{\pi}{4}$, $x_2 \approx \pi n + 1{,}16$. **739.** $x_1 \approx \pi n + \frac{\pi}{4}$, $x_2 \approx \pi n + 1{,}95$. **740.** $x_1 = \pi n + \frac{\pi}{4}$, $x_2 \approx \pi n + 2{,}01$. **749.** $\frac{1}{2}$. **750.** 1. **751.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

752. 1. **753.** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$.

754. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $2-\sqrt{3}$, $-2+\sqrt{3}$.

756. $-\frac{36}{85}$. **757.** $\frac{140}{221}$. **758.** $\frac{33}{65}$. **759.** $\frac{333}{725}$.

760. $-\frac{13}{85}$. **773.** $x = \pi n$. **774.** $x = \pi n + \frac{\pi}{2}$. **775.** $x = \pi n + \frac{11\pi}{12}$.

776. $\frac{2\pi n}{3}$. **784.** $-\frac{1}{2}$. **789.** $\frac{1}{27}$. **792.** $-3{,}5$. **794.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **797.** $\frac{n^2 - m^2}{2}$.

798. $-0{,}25$. **804.** $h'(x) = \frac{-2(3x+2)\cos(1-2x) - 3\sin(1-2x)}{(3x+2)^2}$.

809. $y'(x) = 6 \sin 3x \cos 3x$. **814.** $f''(x) = -\sin x$.

817. $h''(x) = -k^2 \cos kx$, $h''\left(\frac{\pi}{2}\right) = k^2(-1)^{k+1}$.

825. $g''(x) = -\frac{6}{5}\sin\left(\frac{x}{5}+2\right) - \frac{3}{25}x\cos\left(\frac{x}{5}+2\right)$.

829. $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $s = \frac{v_0^2}{g}$.

831. $y = -1$, $y = x + \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

Предметный указатель