Элементы теории, примеры решения задач для выполнения летнего квалификационного задания по математике

ГЛАВА 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x, y и положительных a и b верны равенства:

$$a^0=1; \tag{1.1}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \tag{1.2}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \tag{1.3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{1.4}$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \tag{1.6}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{1.7}$$

Многочлены

Для любых a, b и c верны равенства:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b); \tag{1.8}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \tag{1.9}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2; \tag{1.10}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$\text{или } (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b); \tag{1.11}$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$\text{или } (a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b); \tag{1.12}$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2); \tag{1.13}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2); \tag{1.14}$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{1.15}$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}; \qquad (1.16)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0); \qquad (1.17)$$

$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}; \qquad (1.18)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[kn]{a}; \qquad (1.19)$$

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}; \qquad (1.20)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n=a \quad (a\geqslant 0); \qquad (1.21)$$

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}, \text{ если } 0\leqslant a<b; \qquad (1.22)$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a \text{ при } a\geqslant 0, \\ -a \text{ при } a<0; \end{cases} \qquad (1.23)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|; \qquad (1.24)$$

$$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a} \quad (a\geqslant 0). \qquad (1.25)$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4+2x^2-3x+1}{x^2+\sqrt{3x}+1}+2\left(\sqrt[6]{27x^3}-\frac{1}{2}\right).$$

☐ Обозначим дробь через A, а выражение в скобках — через B; тогда заданное выражение примет вид $A+2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x\geqslant 0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x\geqslant 0$.

Используя формулу (1.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4+2x^2+1-3x=(x^2+1)^2-3x.$$

Так как $x\geqslant 0$, то в силу равенства (1.21) имеем $3x=(\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (1.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2+1)^2-(\sqrt{3x})^2=(x^2+1-\sqrt{3x})\,(x^2+1+\sqrt{3x}).$$

Следовательно,

$$A=\frac{(x^2-\sqrt{3x}+1)\,(x^2+\sqrt{3x}+1)}{x^2+\sqrt{3x}+1}=x^2-\sqrt{3x}+1.$$

Далее, на основании формулы (1.20) имеем $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$, откуда $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Итак, $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\ 0<a<2b.$$

□ Имеем $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; здесь были использованы формулы (1.9), (1.10) и (1.23). Следовательно, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Теперь находим

$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{(2b-a)(a-2b)-8ab+2b(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.\ ■$$

Пример 3. Упростить выражение

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\ x>1.$$

□ Используя формулу (1.15), разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе дроби:

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$

Так как $x>1$, то в силу соотношения (1.21) имеем $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ и $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Значит,

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\ ((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}\ ((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})},$$

откуда после сокращения получим $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ■

Пример 4. Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовое выражение

$$A=(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}-\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}})\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

□ Используя формулы (1.16), (1.8), (1.20) и (1.10), находим:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}}=4;$

2) $\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\ \sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\,\frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$

$$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})\,(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{121}}=1.$$

Окончательно получим $A=4-1=3$. ■

Пример 5. Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$

□ Положим $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Возведем в куб обе части этого равенства. Используя формулу (1.11), получаем

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})\,(38-\sqrt{1445})}\;x=x^3,$$

или $x^3+3x-76=0$. Подстановкой $x=4$ убеждаемся в том, что $x=4$ является одним из корней полученного кубического уравнения: $64+12-76=0$.

Преобразуем кубическое уравнение: $x^3-64=3\,(4-x)$; $(x-4)\,(x^2+4x+16)+3\,(x-4)=0$; $(x-4)\,(x^2+4x+19)=0$. Но множитель $x^2+4x+19$ не имеет действительных корней. Значит, 4 — единственное возможное действительное значение для x, чем и доказано требуемое равенство (поскольку очевидно, что $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — действительное число). ■

Пример 6. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

□ Рассмотрим равенство

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство. Пусть $a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Легко установить, что $a>0$ и $b>0$. Если при этом выполняется равенство $a^2=b^2$, то $a=b$. Находим

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3};$$

$$b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2=b^2$, то $a=b$, т. е. заданное равенство справедливо.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренных выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ и $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тогда левая часть заданного равенства есть $\frac{(2+\sqrt{3})\,(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$ и $2=2$. ■

Пример 7. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ и $\sqrt{8-t^2}$, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной t находить не нужно)?

□ Согласно условию, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Используя формулу $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$, получим $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\dfrac{24-8}{2}=8$. ■

ГЛАВА 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1^0. *Уравнением с одной переменной* называется равенство, содержащее эту переменную (ее иногда называют неизвестным).

Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство, называется *корнем* (или *решением*) уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

2^0. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются *равносильными*. В процессе решения заданное уравнение заменяют более простым; при этом используют следующие правила преобразования уравнения в равносильное ему:

а) какое-нибудь слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;

б) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число;

в) уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ можно заменить равносильной системой $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$ или решить уравнение $f(x)=0$, а затем отбросить те из найденных корней, которые обращают в нуль знаменатель $g(x)$.

3^0. Пусть в результате преобразования уравнения

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{2.1}$$

получено уравнение

$$f_2(x)=g_2(x). \tag{2.2}$$

Если каждый корень уравнения (2.1) является корнем уравнения (2.2), то уравнение (2.2) называют *следствием* уравнения (2.1).

Корни уравнения (2.2), не удовлетворяющие уравнению (2.1), называются *посторонними* корнями уравнения (2.1) и не считаются решениями этого уравнения.

К появлению посторонних корней могут, например, привести (но не обязательно приводят) такие преобразования: возведение в квадрат (или другую четную степень) обеих частей уравнения, умножение обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную, и т. п.

4^0. Чтобы выяснить, имеются ли среди корней уравнения-следствия посторонние корни исходного уравнения, необходимо проверить каждый из найденных корней подстановкой его в исходное уравнение.

Можно поступить иначе: на каждом этапе решения уравнения определять промежутки, в которых могут находиться корни уравнения. Все корни, не принадлежащие этим промежуткам, являются посторонними и должны быть отброшены. Однако остальные корни все равно необходимо проверить подстановкой в исходное уравнение.

5^0. Если уравнение имеет вид $f(x)\,h(x)=g(x)\,h(x)$, то деление обеих его частей на $h(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере корней; в этом случае могут быть потеряны корни уравнения $h(x)=0$, если они существуют.

Уравнение не считается решенным как в случае, когда ответ содержит посторонние корни, так и в случае, когда в процессе решения был потерян хотя бы один корень.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$.

□ Перенесем все члены уравнения в левую часть и преобразуем полученное выражение к виду $\frac{x^2-7x+12}{2x(3-x)}=0$. Из уравнения $x^2-7x+12=0$ находим $x_1=3$, $x_2=4$. При $x=3$ знаменатель обращается в нуль; значит, 3 не является корнем. Итак, получаем ответ: $x=4$. ■

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2}=x-4$.

□ Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{x-2})^2=(x-4)^2,\ x-2=x^2-8x+16;$$
$$x^2-9x+18=0,\ x_1=3,\ x_2=6.$$

Проверим найденные корни, подставив их в исходное уравнение. Если $x=3$, то получаем $1=-1$ — неверное равенство; если $x=6$, то получаем $2=2$ — верное равенство. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень $x=6$.

Отметим, что можно было сначала найти область определения данного уравнения. Для этого решим систему неравенств $\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ x-4\geqslant 0,\end{cases}$ откуда $x\geqslant 4$. Тогда сразу видно, что $x_1=3$ — посторонний корень исходного уравнения. Проверкой убеждаемся, что $x=6$ удовлетворяет заданному уравнению. Итак, $x=6$. ■

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.

□ Преобразуя правую часть уравнения, получаем:

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{4x^2-4x+1};$$
$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x-1)^2};\ \sqrt{1-4x}+2=|2x-1|.$$

Это уравнение имеет решение лишь при условии $1-4x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 1/4$. Тогда $|2x-1|=1-2x$ (а не $2x-1$, так как это верно только при $x\geqslant 1/2$, что противоречит условию $x\leqslant 1/4$). Значит, $\sqrt{1-4x}+2=1-2x$, откуда

$$\sqrt{1-4x}=-1-2x. \qquad (*)$$

Область возможных значений x определяется системой неравенств $\begin{cases}1-4x\geqslant 0,\\ -1-2x\geqslant 0,\end{cases}$ т. е. $x\leqslant -1/2$. Возведя обе части уравнения (*) в квадрат, получим

$$1-4x=1+4x+4x^2;\ 4x^2+8x=0,\ x_1=0,\ x_2=-2.$$

Корень $x_1=0$ не удовлетворяет условию $x\leqslant -1/2$ и поэтому является посторонним; корень $x_2=-2$ удовлетворяет неравенству $x\leqslant -1/2$, но его следует проверить. Подставив $x=-2$ в исходное уравнение, получим верное равенство: $3+2=5$. Итак, заданное уравнение имеет единственный корень $x=-2$. ■

При решении уравнений часто используются метод разложения на множители и метод замены переменной.

Пример 4. Решить уравнение $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

□ Раскрыв скобки и приведя подобные члены, имеем $2x^3+3x^2+3x+2=0$. Разложим левую часть уравнения на множители. Сначала группируя члены уравнения, а затем используя формулу (1.13), получаем

$$2(x^3+1)+3x(x+1)=0;\ 2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0;$$
$$(x+1)(2x^2+x+2)=0.$$

Последнее равенство верно при условии, что по крайней мере один из сомножителей равен нулю: $x+1=0$, откуда $x=-1$, или $2x^2+x+2=0$. Однако дискриминант последнего уравнения отрицателен, следовательно, оно не имеет корней. Итак, $x=-1$. ■

Пример 5. Решить уравнение $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

□ Введем переменную z, полагая $x+\frac{1}{x}=z$. Тогда $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2$, откуда по формуле (1.9) находим $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$.

Заменив в данном уравнении выражение в первой скобке на z, а во второй — на z^2-2, получим

$$7z-2(z^2-2)=9;\ 2z^2-7z+5=0;\ z_1=5/2,\ z_2=1.$$

Для отыскания x следует решить два квадратных уравнения:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\ 2x^2-5x+2=0;\ x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2};$$

$$x+\frac{1}{x}=1,\ x^2-x+1=0;\ D<0 \text{ — корней нет.}$$

Итак, получаем ответ: $x_1=2$; $x_2=1/2$. ■

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

□ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x+1+4x+13+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}=3x+12;$$
$$\sqrt{(x+1)(4x+13)}=-(x+1).$$

Еще одно возведение в квадрат привело бы к уничтожению иррациональности, однако здесь нет необходимости в этом преобразовании. Замечаем, что полученное уравнение-следствие может иметь решение только при условии $x+1\leqslant 0$. Вместе с тем одним из условий существования решения исходного уравнения является требование $x+1\geqslant 0$. Оба условия совместны в единственном случае, если $x+1=0$, откуда $x=-1$. Это значение x, как легко проверить, удовлетворяет исходному уравнению. Так как уравнение-следствие других корней не имеет, то других корней не имеет и исходное уравнение. Итак, $x=-1$. ■

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

□ Так как $x=5$ не является корнем уравнения, то обе части уравнения можно разделить на $\sqrt[3]{(5-x)^2}$, причем потери корней не произойдет. Получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Полагая $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=z$, приходим к квадратному уравнению $z^2-5z+4=0$, откуда $z_1=1$, $z_2=4$. Для отыскания x имеем два уравнения: $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=1$

и $\sqrt[3]{\dfrac{5+x}{5-x}}=4$. Возведя в куб обе части каждого из них, получим $\dfrac{5+x}{5-x}=1$, откуда $x=0$, и $\dfrac{5+x}{5-x}=64$, откуда $x=63/13$. Итак, $x_1=0$; $x_2=63/13$. ■

Пример 8. Решить уравнение

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3.$$

□ Запишем уравнение в следующем виде:

$$(2x^2-3x+2)-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0.$$

Положим $\sqrt{2x^2-3x+2}=z$; отметим, что пригодными могут быть только значения $z\geqslant 0$. Произведя указанную замену, получим уравнение $z^2-2z+1=0$, откуда $z=1$ — это пригодное значение z и поэтому уравнение $\sqrt{2x^2-3x+2}=1$ или $2x^2-3x+1=0$ равносильно заданному. Корни $x_1=1/2$, $x_2=1$ этого квадратного уравнения являются корнями исходного уравнения. ■

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

□ Положим $\sqrt{x-1}=z$ и заметим, что $z\geqslant 0$, $x\geqslant 1$, $x=z^2+1$. Тогда на основании формулы (1.23) получим $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-4z+4}=|z-2|$; $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-6z+9}=|z-3|$. Исходное уравнение примет вид

$$|z-2|+|z-3|=1. \qquad (*)$$

Используя определение модуля, рассмотрим следующие случаи:

1) если $z<2$, то $2-z+3-z=1$, откуда $z=2$;

2) если $2\leqslant z<3$, то $z-2+3-z=1$, откуда $1=1$, т. е. все значения z, принадлежащие промежутку [2, 3), удовлетворяют уравнению;

3) если $z\geqslant 3$, то $z-2+z-3=1$, откуда $z=3$.

Объединяя эти решения, заключаем, что уравнению (*) удовлетворяют все значения z, для которых $2\leqslant z\leqslant 3$.

Так как $z=\sqrt{x-1}$, то $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$; значит, $4\leqslant x-1\leqslant 9$, откуда $5\leqslant x\leqslant 10$. ■

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x+y+z=7,\\ x+2y+z=8,\\ x+y+2z=9.\end{cases}$$

□ Эту систему линейных уравнений можно решать методом последовательного исключения (методом Гаусса), однако проще поступить так: сложив уравнения, получим $4(x+y+z)=24$, откуда $x+y+z=6$. Последовательно вычитая это уравнение из каждого уравнения системы, находим $x=1$, $y=2$, $z=3$. ■

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6,\\ x^2y+y^2x=20.\end{cases}$$

□ Возведем в квадрат обе части первого уравнения:

$$x^2y+y^2x+2xy\sqrt{xy}=36.$$

Вычитая из этого уравнения второе уравнение системы, получаем $xy\sqrt{xy}=8$ или $(xy)^3=64$, т. е. $xy=4$. Это уравнение и второе уравнение заданной системы образуют систему

$$\begin{cases} xy=4, \\ xy\,(x+y)=20 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy=4, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Отсюда находим две пары решений: $x_1=4$, $y_1=1$ и $x_2=1$, $y_2=4$. Проверкой убеждаемся, что обе пары удовлетворяют исходной системе уравнений. ■

ГЛАВА 3

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Пример 1. В направлении от A к B автомобиль ехал некоторое время с постоянной скоростью $v_1=60$ км/ч. Остальную часть пути он проехал за такое же время, но со скоростью $v_2=40$ км/ч. В противоположном направлении автомобиль ехал одну половину пути со скоростью $v_3=80$ км/ч, а другую половину — со скоростью $v_4=45$ км/ч. Какова средняя скорость рейса: а) из A в B? б) из B в A?

□ а) Так как автомобиль в течение одинаковых промежутков времени ехал с каждой из указанных скоростей, то $v_{ср}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{60+40}{2}=50$ (км/ч).

б) Обратный рейс состоит из двух равных частей пути (предположим, что каждая из них равна s км), которые пройдены автомобилем в неравные промежутки времени; поэтому было бы неверно считать, что $v_{ср}=\frac{v_3+v_4}{2}=\frac{80+45}{2}=62{,}5$ (км/ч). Пусть автомобиль ехал x часов со скоростью v_3 и y часов — со скоростью v_4. Тогда $v_3x=v_4y=s$, откуда $x=\frac{v_4y}{v_3}$. Следовательно, средняя скорость

$$v_{ср}=\frac{2s}{x+y}=\frac{2v_4y}{v_4y/v_3+y}=\frac{2v_3v_4}{v_3+v_4}=\frac{2\cdot80\cdot45}{125}=57{,}6 \text{ (км/ч)}. \ \blacksquare$$

Пример 2. Бригада рабочих выполнила некоторое задание. Если бригаду уменьшить на 20 человек, то такое же задание она выполнит на 5 дней позже, чем при первоначальном составе, а если бригаду увеличить на 15 человек, то она выполнит задание на 2 дня раньше. Сколько рабочих было в бригаде первоначально и за сколько дней они выполнили задание?

□ Пусть x рабочих выполнили задание за y дней; тогда по условию $xy=(x-20)(y+5)$ и $xy=(x+15)(y-2)$.

Запишем оба равенства в виде пропорций: $\frac{x-20}{x}=\frac{y}{y+5}$ и $\frac{x+15}{x}=\frac{y}{y-2}$. Каждую пропорцию вида $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ заменим равносильной пропорцией вида $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. Тогда получим $\frac{-20}{x}=-\frac{5}{y+5}$ и $\frac{15}{x}=\frac{2}{y-2}$. Теперь легко находим, что $x=60$ и $y=10$.

Итак, в бригаде было 60 человек, которые выполнили задание за 10 дней. ■

Пример 3. Три насоса, качающие воду для поливки, начали работать одновременно. Первый и третий насосы закончили работу одновременно, а второй — через 2 ч после начала работы. В результате первый насос выкачал 9 м^3 воды, а второй и третий вместе 28 м^3. Какое количество воды выкачивает за час каждый насос, если известно, что третий насос за час выкачивает на 3 м^3 больше, чем первый, и что три насоса, работая вместе, выкачивают за час 14 м^3?

□ Пусть первый и второй насосы выкачивают за час соответственно x и y м^3, тогда третий выкачивает за час $(x+3)$ м^3. Второй и третий насосы выкачали соответственно $2y$ и $(28-2y)$ м^3 воды. Первый насос работал $9/x$ часов, третий $(28-2y)/(x+3)$ часов. Согласно условию, $\frac{9}{x}=\frac{28-2y}{x+3}$ и $2x+y+3=14$. Решая систему уравнений, находим $x=3$, $y=5$. Итак, получаем ответ: 3, 5 и 6 м^3. ■

Пример 4. Пешеход, идущий из совхоза на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от совхоза до станции и с какой постоянной на всем пути скоростью пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

□ Составим следующую таблицу:

Пешеход пришел бы на станцию	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Точно	x	v	$\frac{x}{v}$
С опозданием	$x-3$	3	$\frac{x-3}{3}$
С опережением	$x-3$	4	$\frac{x-3}{4}$

Уравнивая промежутки времени, записанные в первой и второй, в первой и третьей строках, получаем систему уравнений

$$\frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{3}-\frac{2}{3},\quad \frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{1}{4}$$

или $\frac{x-2}{3}=\frac{x+2}{4}$, откуда $x=14$. Итак, получаем ответ: $x=14$ км, $v=3{,}5$ км/ч. ■

Пример 5. Расстояние между точками A и B равно 270 м. Из A в B равномерно движется тело; достигнув B, оно сразу же возвращается назад с той же скоростью. Второе тело, выходящее из B в A через 11 с после выхода первого из A, движется равномерно, но медленнее. На пути от B к A оно встречается с первым дважды: через 10 и 40 с после своего выхода из B. Найти скорость движения каждого тела.

□ Удобная модель задачи — график равномерного движения в системе координат «путь» (s — в метрах), «время» (t — в секундах). Пусть AC (рис. 3.1) — график движения из A в B со скоростью $v_1=\operatorname{tg}\alpha$ (ось времени At); CD — график движения из B в A того же тела с той же скоростью $v_1=\operatorname{tg}\alpha$ (ось времени Bt); EF — график движения из B в A со скоростью $v_2=\operatorname{tg}\beta$, $\beta<\alpha$ (ось времени Bt).

Промежуток времени $BE=11$, промежуток времени до первой встречи $EH=10$, между первой и второй встречами $HK=30$; тогда $NM=21v_1$, $HM=10v_2$, $KF=40v_2$, $NM+HM=AB=270$, т. е.

$$21v_1+10v_2=270. \qquad (*)$$

Промежуток времени $HC=HM/v_1=10v_2/v_1$; промежуток времени $CK=KF/v_1=$ $=40v/v_1$. Так как $HC+CK=30$, то $10v_2/v_1+40v_2/v_1=30$, откуда

$$5v_2=3v_1. \qquad (**)$$

Решая совместно уравнения (*) и (**), находим $v_1=10$ м/с, $v_2=6$ м/с. ■

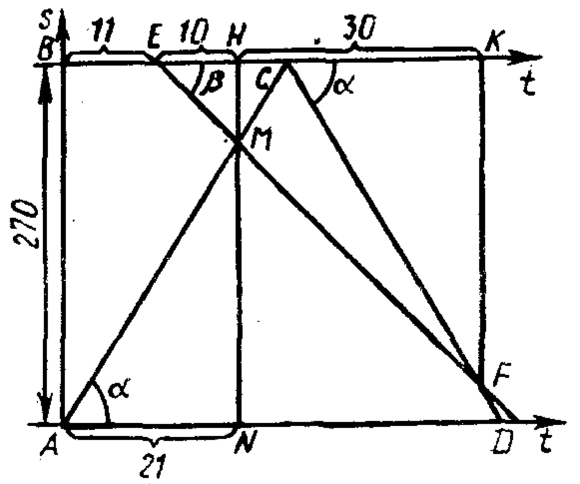

Рис. 3.1

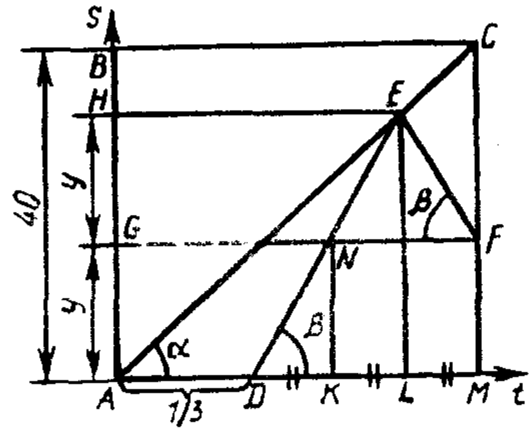

Рис. 3.2

Пример 6. Из A в B вышла машина с почтой. Через 20 мин по тому же маршруту вышла вторая машина, скорость которой 45 км/ч. Догнав первую машину, шофер передал пакет и немедленно поехал обратно с той же скоростью (время, затраченное на остановку и разворот, не учитывается). В тот момент, когда первая машина прибыла в B, вторая достигла лишь середины пути от места встречи ее с первой машиной до пункта A. Найти скорость первой машины, если расстояние между A и B равно 40 км.

□ Рассмотрим систему координат «путь» (s — в километрах), «время» (t — в часах). Пусть AC (рис. 3.2) — график движения первой машины с искомой скоростью $v=\operatorname{tg}\alpha$; DE и EF — график движения «туда — обратно» второй машины со скоростью $\operatorname{tg}\beta=45$; $AD=1/3$. Известно, что $AB=40$ и G — середина пути AH. Пусть $AG=NK=y$. Тогда промежуток времени $DK=y/\operatorname{tg}\beta=y/45$. Геометрически ясно, что $DK=KL=LM$, поэтому промежуток времени движения первой машины $AM=\frac{1}{3}+\frac{3y}{45}$, откуда

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{15}\right)v=40. \qquad (*)$$

Промежуток времени $AL=\frac{1}{3}+\frac{2y}{45}$, $LE=AH=2y$, поэтому

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2y}{45}\right)v=2y. \qquad (**)$$

Решая совместно уравнения (*) и (**), находим $y=15$ км и $v=30$ км/ч. ■

Пример 7. Из колбы, содержащей раствор соли, отливают $1/n$ раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор выливают в колбу и смешивают с оставшимся в ней раствором. В результате содержание соли в растворе повысилось на $p\%$. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе.

□ Пусть в колбе было первоначально n литров раствора, содержащего $x\%$ соли, что составляет $nx/100$ л соли. В пробирку отлили $\frac{1}{n}\cdot n=1$ л раствора. По условию после выпаривания процентное содержание соли в пробирке повысилось вдвое; так как выпаривается только вода, а количество соли остается неизменным, то затем в колбу вылили только 0,5 л раствора. Тогда в колбе окажется $n-1+0{,}5=n-0{,}5$ л раствора, в котором по-прежнему содержится $nx/100$ л соли.

Согласно условию, имеем $nx/100=(x+p)(n-0{,}5)/100$, или $nx=(x+p)(n-0{,}5)$, откуда $x=p(2n-1)$. ■

Пример 8. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами: первая цифра числа в три раза меньше суммы двух других его цифр; разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81.

□ Пусть искомое число имеет вид $100x+10y+z$, где x, y, z — его цифры. Согласно условию, $3x=y+z$ и число $100x+10y+z-(100x+10z+y)$ делится на 81. Упрощая, получаем, что $9(y-z)$ делится на 81, т. е. $y-z$ кратно числу 9. Так как y и z — цифры, то последнее возможно лишь в двух случаях: 1) $y-z=0$ и 2) $y-z=9$.

В первом случае имеем систему $\begin{cases}3x=y+z,\\ y-z=0\end{cases}$, откуда $3x=2y$, что возможно при $x=2$, $y=z=3$ (искомое число 233), при $x=4$, $y=z=6$ (искомое число 466) и при $x=6$, $y=z=9$ (искомое число 699). Во втором случае имеем систему $\begin{cases}3x=y+z,\\ y-z=9.\end{cases}$ Второе уравнение системы возможно лишь при $z=0$, $y=9$; тогда $x=3$ и искомое число равно 390. Итак, получаем ответ: 233, 390, 466, 699. ■

ГЛАВА 4

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

(здесь и в дальнейшем запись $n \in \mathbb{Z}$ означает, что n — любое целое число)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{4.1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbb{Z}; \tag{4.2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \tag{4.3}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,\ x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \tag{4.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbb{Z}; \tag{4.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{4.7}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \tag{4.8}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \tag{4.9}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \tag{4.10}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \tag{4.11}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \tag{4.12}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \tag{4.13}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x; \tag{4.14}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k,\ k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.15}$$

Формулы половинного аргумента
(для функций sin и cos — формулы понижения степени)

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}; \tag{4.16}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}; \tag{4.17}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \tag{4.18}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \tag{4.19}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \tag{4.20}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \tag{4.21}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \tag{4.22}$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},\ x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{4.23}$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y},\ x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \tag{4.24}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)); \tag{4.25}$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)); \tag{4.26}$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)). \tag{4.27}$$

Соотношения между $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ x\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{4.28}$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ x\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbf{Z}. \tag{4.29}$$

	Название функции не изменяется			Название функции изменяется на сходное			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z$			$\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$			
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
	$\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$			$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z$			

Пример 1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha=\frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.$$

□ Применяя последовательно к левой части равенства формулы (4.2), (4.3), (4.1) и (4.13), находим

$$A=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}+\frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin^2 6\alpha+\cos^2 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=\frac{2}{\sin 4\alpha}+\frac{2}{\sin 12\alpha}=$$

$$=\frac{2(\sin 12\alpha+\sin 4\alpha)}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}.$$

Преобразуя сумму синусов по формуле (4.19), получаем $A=\frac{4\sin 8\alpha\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}$. Так как $\sin 8\alpha=2\sin 4\alpha\cos 4\alpha$, то

$$A=\frac{8\sin 4\alpha\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}=\frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.\ ■$$

Пример 2. Упростить выражение

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4}.$$

□ К произведению первых двух сомножителей применим формулу (4.27). Тогда получим

$$A=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Снова используя формулу (4.27), находим

$$A=\frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{3\alpha}{4}\right)+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}. \blacksquare$$

Пример 3. Представить в виде произведения

$$A=2\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha-1.$$

□ Согласно формуле (4.14), имеем $2\cos^2 3\alpha-1=\cos 6\alpha$. Следовательно,

$$A=\cos 6\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Так как выражение в скобках — развернутая формула (4.10) для косинуса разности, то $A=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-6\alpha\right)$. ■

Пример 4. Проверить, что $\operatorname{tg} 20°+4\sin 20°=\sqrt{3}$.

□ Применив формулы (4.2), (4.13) и (4.19), получим

$$A=\operatorname{tg} 20°+4\sin 20°=\frac{\sin 20°+4\sin 20°\cos 20°}{\cos 20°}=\frac{\sin 20°+2\sin 40°}{\cos 20°}=$$

$$=\frac{(\sin 20°+\sin 40°)+\sin 40°}{\cos 20°}=\frac{2\sin 30°\cos 10°+\sin 40°}{\cos 20°}=\frac{\cos 10°+\sin 40°}{\cos 20°}.$$

Заменив по формуле приведения $\cos 10°$ на $\sin 80°$ и снова используя формулу (4.19), находим

$$A=\frac{\sin 80°+\sin 40°}{2}=\frac{2\sin 60°\cos 20°}{\cos 20°}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}. \blacksquare$$

Пример 5. Найти значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x-\cos x=1{,}4$.

□ Удобно воспользоваться формулами (4.28) и (4.29), учитывая, что они верны только при $x\neq\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. Однако в данном случае x не может принимать эти значения. Действительно, если бы $x=\pi(2n+1)$, то $\sin(\pi(2n+1))-\cos(\pi(2n+1))=0-(-1)\neq 1{,}4$. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$, перепишем данное равенство в виде

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=1{,}4.$$

Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, получаем уравнение $z^2-5z+6=0$, откуда $z_1=2$, $z_2=3$. Итак, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$. ■

Пример 6. Упростить выражение

$$A=\frac{1}{2}\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha).$$

□ По формуле приведения имеем $\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos^2 2\alpha$. Преобразуем $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha$ как сумму кубов по формуле (1.13):

$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(\cos^2\alpha)^3+(\sin^2\alpha)^3=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha),$$

откуда, учитывая формулы (4.1) и (4.13), находим $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. Использовав полученные результаты, перепишем заданное выражение в виде

$$A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

После приведения подобных членов получим $A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$ [на основании тождества (4.14)]. Итак, $A=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$. ■

Пример 7. Упростив выражение

$$A=\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha},$$

найти его значение, если $\operatorname{tg} 5\alpha=\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

□ Перегруппируем слагаемые в числителе и знаменателе и воспользуемся формулами (4.19) и (4.21). Тогда получим

$$A=\frac{(\sin 8\alpha+\sin 12\alpha)+(\sin 9\alpha+\sin 11\alpha)+\sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha+\cos 12\alpha)+(\cos 9\alpha+\cos 11\alpha)+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha+2\sin 10\alpha\cos\alpha+\sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha+2\cos 10\alpha\cos\alpha+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 10\alpha\,(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}{\cos 10\alpha\,(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}=\operatorname{tg} 10\alpha=\frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}$$

[применена формула (4.15)]. Теперь правую часть заданного равенства $\operatorname{tg} 5\alpha=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ умножим и разделим на $\sin 20^\circ$; трижды применяя формулу (4.13), находим

$$\operatorname{tg} 5\alpha=\frac{(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{(\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Следовательно, $A=\dfrac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{1}{64}}=\dfrac{16}{63}$. ■

Пример 8. Доказать, что для любого числа k слагаемых и любого $\alpha\neq 2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$ справедливы равенства:

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos k\alpha=\frac{\sin\dfrac{k\alpha}{2}\cos\dfrac{(k+1)\,\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}};\qquad\text{(а)}$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin k\alpha=\frac{\sin\dfrac{k\alpha}{2}\sin\dfrac{(k+1)\,\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.\qquad\text{(б)}$$

Эти формулы удобно использовать для преобразования суммы косинусов или синусов при большом количестве слагаемых.

□ Пусть $S_k(\alpha)=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos k\alpha$. Умножив обе части этого равенства на $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, получим

$$2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha+\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha.$$

Применяя формулу (4.27), имеем

$$2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=\left(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)+$$

$$+\left(\sin\frac{7\alpha}{2}-\sin\frac{5\alpha}{2}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2}-\sin\frac{\alpha(2k-1)}{2}\right).$$

Замечаем, что первое слагаемое в каждой скобке взаимно уничтожается со вторым слагаемым в следующей скобке. Таким образом, правая часть последнего равенства есть разность $\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$. Преобразовав ее по формуле (4.20), получим $2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$, откуда следует равенство для $S_k(\alpha)$, т. е. формула (а).

Аналогично доказывается справедливость равенства (б). ■

Замечания. 1. Вместо приведенного способа решения можно применить метод математической индукции.

2. Запоминать полученные формулы нет необходимости, однако показанный здесь прием преобразования тригонометрических выражений может оказаться эффективным в практике решения аналогичных задач.

ГЛАВА 5
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. *Простейшими тригонометрическими уравнениями* называются уравнения вида $\sin x=a$ (где $|a|\leqslant 1$), $\cos x=a$ (где $|a|\leqslant 1$), $\operatorname{tg} x=a$ (где $-\infty<a<+\infty$), $\operatorname{ctg} x=a$ (где $-\infty<a<+\infty$). Формулы решений этих уравнений имеют следующий вид (здесь и в дальнейшем $n\in\mathbf{Z}$ означает, что n — целое число):

$$\sin x=a;\ x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.1}$$
$$\cos x=a;\ x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.2}$$
$$\operatorname{tg} x=a;\ x=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.3}$$
$$\operatorname{ctg} x=a;\ x=\operatorname{arcctg} a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \tag{5.4}$$

В частных случаях при $a=0$, $a=1$, $a=-1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x=0;\ x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.5}$$
$$\sin x=1;\ x=\pi/2+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.6}$$
$$\sin x=-1;\ x=-\pi/2+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.7}$$
$$\cos x=0;\ x=\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.8}$$
$$\cos x=1;\ x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.9}$$
$$\cos x=-1;\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.10}$$
$$\operatorname{tg} x=0;\ x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}; \tag{5.11}$$
$$\operatorname{ctg} x=0;\ x=\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \tag{5.12}$$

Уравнения вида $\sin(\omega x+\varphi)=a$, $\cos(\omega x+\varphi)=a$, $\operatorname{tg}(\omega x+\varphi)=b$, $\operatorname{ctg}(\omega x+\varphi)=b$ ($|a|<1$, $\omega\neq 0$, φ, b — любые действительные числа) также относятся к простейшим. Их следует решать сразу по формулам (5.1)—(5.4), заменив x на $\omega x+\varphi$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

☐ Согласно формуле (5.1), имеем $\frac{\pi}{6}-2x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$. Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6}-2x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, откуда $x=-(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ или $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}(6n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

Если уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим уравнениям, совокупность которых равносильна заданному.

2°. При решении тригонометрических уравнений часто используются разложение на множители и введение новой переменной (метод подстановки).

Пример 2. Решить уравнение $\sin x=\sin 2x\cos 3x$.

☐ Применив к $\sin 2x$ формулу (4.13), получим

$$\sin x=2\sin x\cos x\cos 3x,\ \sin x\,(1-2\cos x\cos 3x)=0.$$

Так как оба множителя в левой части этого уравнения имеют смысл при любых значениях x, то оно равносильно совокупности двух уравнений: $\sin x=0$ и $1-2\cos x\cos 3x=0$.

Согласно формуле (5.5), первому уравнению удовлетворяют значения $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Для решения второго уравнения преобразуем произведение косинусов в сумму по формуле (4.26); имеем $1-(\cos 4x+\cos 2x)=0$. Так как $1-\cos 4x=2\sin^2 2x$ [см. формулу (4.16)], то уравнение принимает вид $2\sin^2 2x-\cos 2x=0$ или $2(1-\cos^2 2x)-\cos 2x=0$, откуда получим $2\cos^2 2x+\cos 2x-2=0$ — квадратное уравнение относительно $\cos 2x$. Полагая $\cos 2x=z$, имеем $2z^2+z-2=0$. Решая это уравнение, находим $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$. Так как $|z_2|=\left|\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right|>1$, то уравнение $\cos 2x=z_2$ не имеет решений. Остается решить уравнение $\cos 2x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$. По формуле (5.2) находим $2x=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Итак, получаем ответ: $x=\pi n$, $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$, $n, k\in\mathbf{Z}$. ■

При решении уравнения методом разложения на множители оно может не быть равносильным полученной совокупности уравнений, так как возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать ошибки в ответе, нужно исключить из полученных значений неизвестного те, для которых заданное уравнение не имеет смысла.

Пример 3. Решить уравнение $(1-\sin x)(\operatorname{tg}^2 x-3)=0$.

□ Найдем значения x, удовлетворяющие каждому из уравнений $1-\sin x=0$ и $\operatorname{tg}^2 x-3=0$; если $\sin x=1$, то по формуле (5.6) получим

$$x=\pi/2+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}; \tag{*}$$

если $\operatorname{tg}^2 x=3$, т. е. $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$, то по формуле (5.3) имеем

$$x=\pm\pi/3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \tag{**}$$

Однако было бы ошибочным считать ответом объединение решений (*) и (**). Дело в том, что исходное уравнение не имеет смысла для значений $x=\pi/2+\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$), поэтому первое из предполагаемых решений непригодно и ответом является только второе решение $x=\pm\pi/3+\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$). ■

Пример 4. Решить уравнение $\cos x\cos 2x\cos 4x=1/8$.

□ Наиболее быстрый способ решения — умножение правой и левой частей равенства на $8\sin x$, хотя при этом возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать этого, следует учитывать, что в окончательное решение не должны входить значения x, для которых $\sin x=0$, т. е. значения $x=\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$), так как они не удовлетворяют исходному уравнению.

После умножения на $8\sin x$ уравнение примет вид

$$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin x.$$

Последовательно трижды применив формулу синуса двойного аргумента (4.13), получим сначала $4\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\sin x$, затем $2\sin 4x\cos 4x=\sin x$ и далее $\sin 8x=\sin x$ или $\sin 8x-\sin x=0$. Преобразуя по формуле (4.20) разность синусов в произведение, получаем $\sin\dfrac{7x}{2}\cos\dfrac{9x}{2}=0$.

Пусть $\sin\dfrac{7x}{2}=0$; тогда $\dfrac{7x}{2}=\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$), откуда $x=\dfrac{2\pi k}{7}$ ($k\in\mathbf{Z}$), причем следует исключить значения $x=2\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$), получающиеся при $k=7n$, как посторонние для исходного уравнения. Пусть теперь $\cos\dfrac{9x}{2}=0$; тогда $\dfrac{9x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi m$ ($m\in\mathbf{Z}$), откуда

$x=\frac{\pi(2m+1)}{9}$ ($m\in\mathbf{Z}$), причем следует исключить значения $x=\pi(2n+1)$ ($n\in\mathbf{Z}$), получающиеся при $m=9n+4$ ($n\in\mathbf{Z}$), как посторонние для исходного уравнения.

Итак, получаем ответ: $x=\frac{2\pi k}{7}$, где целое $k\neq 7n$, $n\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi(2m+1)}{9}$, где целое $m\neq 9n+4$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

3°. *Однородными уравнениями* называются уравнения следующего вида:

$$a\sin kx+b\cos kx=0; \tag{5.13}$$

$$a\sin^2 kx+b\sin kx\cos kx+c\cos^2 kx=0; \tag{5.14}$$

$$a\sin^3 kx+b\sin^2 kx\cos kx+c\sin kx\cos^2 kx+d\cos^3 kx=0. \tag{5.15}$$

Уравнение

$$a\sin^2 kx+b\sin kx\cos kx+c\cos^2 kx=d$$

при $d\neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному уравнению вида (5.14), заменив число d тождественно равным ему выражением $d(\sin^2 kx+\cos^2 kx)$.

Для решения уравнений (5.13)—(5.15) в случае $a\neq 0$ рассмотрим такие значения x, при которых $\cos kx=0$. Тогда из каждого уравнения следует, что при тех же значениях x должно быть и $\sin kx=0$, а это невозможно. Значит, решениями этих уравнений могут быть только такие значения x, при которых $\cos kx\neq 0$. Поэтому если (при $a\neq 0$) разделить обе части уравнения (5.13) на $\cos kx$, уравнения (5.14) — на $\cos^2 kx$, уравнения (5.15) — на $\cos^3 kx$, то потери корней не произойдет.

В результате получается алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg} kx$, для решения которого следует произвести подстановку $\operatorname{tg} kx=z$.

Пример 5. Решить уравнение

$$3\sin^2 x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x=0.$$

□ Используя формулы приведения, получаем

$$3\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$$

Это однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$, причем $a\neq 0$, т. е. значения x, при которых $\cos x=0$, не являются решениями заданного уравнения. Разделив члены уравнения на $\cos^3 x$, имеем:

$$3\operatorname{tg}^3 x+3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-1=0;\ (3\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg} x+1)=0;$$

$$3\operatorname{tg}^2 x-1=0,\ \operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ x=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1),\ n\in\mathbf{Z};$$

$$\operatorname{tg} x+1=0,\ \operatorname{tg} x=-1,\ x=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in\mathbf{Z}.$$

Итак, получаем ответ: $x=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$ и $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $n, k\in\mathbf{Z}$. ■

При решении уравнений (5.13)—(5.15) в случае $a=0$ деление на $\cos kx$ недопустимо, так как оно приводит к потере корней — тех значений x, при которых $\cos kx=0$.

При $a=0$ уравнение (5.13) становится простейшим, а для решения уравнений (5.14) и (5.15) следует применить метод разложения на множители.

4°. Другие приемы решения тригонометрических уравнений рассмотрим при решении примеров.

Пример 6. Решить уравнение $3\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos x=4$.

□ При решении таких уравнений удобно использовать формулы понижения степени (4.16) и (4.17), которые имеют вид $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$. Воспользуемся второй из них: $\frac{3\,(1+\cos\,(x-\pi/2))}{2}-2\cos x=4$ и после очевидных преобразований получим уравнение

$$3\sin x-4\cos x=5. \qquad (*)$$

Оно легко приводится к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул (4.28) и (4.29), т. е. равенств $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$, $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$, верных для всех $x\neq\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Отметим, что замена $\sin x$ и $\cos x$ выражениями, содержащими $\operatorname{tg}(x/2)$, может привести к потере корней вида $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Удовлетворяют ли эти значения x исходному уравнению, выясняется проверкой.

Выполнив в уравнении (*) подстановку $\operatorname{tg}(x/2)=z$, которую называют «универсальной», получим уравнение $z^2-6z+9=0$. Оно имеет решение $z=3$. Возвращаясь к переменной x, получим $\operatorname{tg}(x/2)=3$, откуда $x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Остается проверить, не удовлетворяют ли уравнению (*) числа $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Имеем $3\sin(\pi+2\pi n)-4\cos(\pi+2\pi n)\neq5$; значит, числа $x=\pi+2\pi n$ не являются решениями уравнения (*).

Итак, получаем ответ: $x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ■

Пример 7. Решить уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=a$ (a — заданное число).

□ Преобразуем левую часть уравнения по формуле (1.13) как сумму кубов:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=$$
$$=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}(\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x)=$$
$$=(\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x)-3\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}_{1}-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Согласно формуле (4.13), имеем $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$. Тогда получим равносильное исходному уравнение $1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=a$, откуда $\sin^2 2x=\frac{4\,(1-a)}{3}$. Если $0\leqslant\frac{4\,(1-a)}{3}<1$, т. е. $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant1$, то уравнение $\sin 2x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3\,(1-a)}$ имеет решение

$$x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3\,(1-a)}\right)+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}.\ ■$$

В частности, при $a=1$ решением уравнения $\sin^6 x+\cos^6 x=1$ являются числа $x=\pi n/2$ ($n\in\mathbf{Z}$). Однако это уравнение, как и многие другие, можно решить быстрее, используя неравенства $|\sin x|\leqslant1$, $|\cos x|\leqslant1$ (см. примеры 8 и 9).

Пример 8. Решить уравнение $\sin^{2k+2}x+\cos^{2k+2}x=1$ ($k\in\mathbf{N}$).

□ Легко догадаться, что числа $x=\pi n/2$ ($n\in\mathbf{Z}$) являются решениями уравнения. Однако еще следует доказать, что других решений нет. Предположим, что существуют решения $x=\alpha\neq\pi n/2$ ($n\in\mathbf{Z}$). Так как $|\sin\alpha|<1$ и $|\cos\alpha|<1$, то $\sin^2\alpha<1$ и $\cos^2\alpha<1$. Поэтому для любого целого положительного k справедливы неравенства $\sin^{2k+2}\alpha<\sin^2\alpha$ и $\cos^{2k+2}\alpha<\cos^2\alpha$. Складывая их, получаем $\sin^{2k+2}\alpha+$

$+\cos^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. Но $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; следовательно, $\sin^{2k+2}x + \cos^{2k+2}x < 1$ для всех значений $x = \alpha \neq \pi n/2$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Значит, заданное уравнение (в частности, уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$) не имеет решений, отличных от $x = \pi n/2$ $(n \in \mathbf{Z})$. ■

Пример 9. Решить уравнение $\sin(\pi \cos 2x) = 1$.

□ По формуле (5.6) находим $\pi \cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, т. е. $\cos 2x = \frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Но $|\cos 2x| \leqslant 1$, поэтому $k = 0$. Имеем $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, откуда получаем ответ: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. ■