Глава **VI**

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ

(продолжение)

§ 15.

ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

75. Производная синуса

В этом параграфе будут выведены формулы для производных тригонометрических функций. Сначала докажем, что

$$\sin' x = \cos x.^* \qquad (1)$$

Приведем вывод формулы (1), основанный на двух допущениях, справедливость которых будет доказана несколько позднее:

а) функция cos непрерывна при всех значениях аргумента, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x;$$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Допущение о том, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ равен 1, достаточно убедительно из геометрических соображений. В самом деле, считая сначала x положительным, отложим на единичной окружности (рис. 1) от точки P_0 в обе стороны дуги P_0A и P_0B длины x. Длина всей дуги AB равна $2x$. Вычислим длину хорды AB:

$$|AB| = |AC| + |CB| = 2\sin x.$$

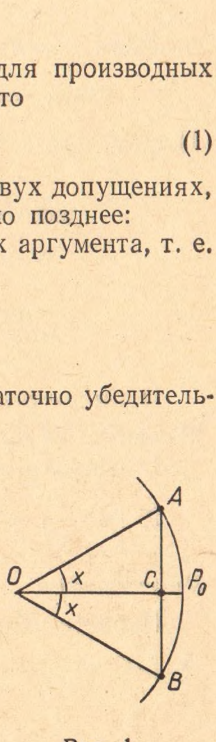

Рис. 1

* Равенство (1) можно записать и в виде $(\sin x)' = \cos x$.

Таким образом, отношение длины хорды AB к длине дуги AB равно

$$\frac{2\sin x}{2x}=\frac{\sin x}{x}.$$

Из рисунка видно, что при малых x длина хорды и длина дуги почти равны, т. е. отношение $\frac{\sin x}{x}$ близко к единице.

Так как

$$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x},$$

то и при отрицательных x, малых по модулю, отношение $\frac{\sin x}{x}$ также близко к единице.

Перейдем теперь к выводу формулы (1). В соответствии с определением производной найдем предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\sin x}{\Delta x},$$

где $\Delta\sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x$. Представим приращение синуса в виде произведения. Для этого в формуле

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad\text{(см. п. 74)}$$

положим $\alpha=x+\Delta x$ и $\beta=x$. Тогда

$$\Delta\sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Поэтому

$$\sin' x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Примеры. Воспользовавшись правилами дифференцирования сложной функции, найдем:

1. $(\sin(ax+b))'=\cos(ax+b)\cdot(ax+b)'=a\cos(ax+b)$.
2. $\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$.

Упражнения

Найдите производную функции:

1. $f(x)=\sin 3x$.
2. $g(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$.
3. $h(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

4. $M(x)=3\sin^2(2x-1)$.
5. $f(t)=\sin 2t\cos t-\sin t\cos 2t$.
6. $f(x)=\sin(-x)+\sin x$.
7. $g(x)=\sin 2x-2\sin x\cos x+5$.
8. $h(x)=\sin(2x-3{,}5)+\sin 2x$.
9. $M(x)=2x+3{,}6\sin^5(\pi-x)$.
10. $f(u)=\cos 2u\cos\frac{\pi}{2}-\sin 2u\cdot\sin\frac{\pi}{2}$.
11. Покажите, что производная функции $f(x)=2x-\sin x$ положительна при всех значениях x и, значит, функция f возрастает на $\boldsymbol{R}$.

12*. Найдите, при каких x производная функции $g(x)=x-\sin x$ обращается в нуль. Покажите, что эта функция возрастает на $\boldsymbol{R}$. Начертите ее график.

13*. Исследуйте функцию $h(x)=x-2\sin x$.

14*. Докажите, что функция $g(x)=\sin(2x-5)-3x$ убывает на промежутке $]-\infty;\infty[$.

76. Производные косинуса, тангенса и котангенса

В этом пункте мы воспользуемся производной синуса (п. 75) для вычисления производных косинуса, тангенса и котангенса.

$$\cos' x=-\sin x,\qquad(1)$$

$$\operatorname{tg}' x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad(2)$$

$$\operatorname{ctg}' x=-\frac{1}{\sin^2 x}.\qquad(3)$$

Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функции.

Для вывода формулы (1) воспользуемся равенством $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ и правилом дифференцирования сложной функции:

$$\cos' x=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=$$

$$=\sin x\,(-1)=-\sin x.$$

Чтобы доказать формулы (2) и (3), применим формулу для производной частного и уже известные формулы для производных синуса и косинуса:

$$\operatorname{tg}' x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{ctg}' x=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найдем касательные к синусоиде в точках с абсциссами $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=\pi$.

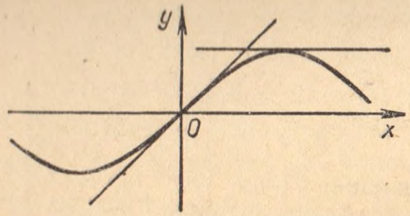

Рис. 2

Как вы знаете (п. 52), уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В данном случае $f(x) = \sin x$. Для решения задачи надо найти значение производной синуса в точках 0, $\frac{\pi}{2}$ и π. Производная синуса равна косинусу: $f'(0) = \cos 0 = 1$. Далее находим $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $f'(\pi) = \cos \pi = -1$. Поэтому:

1) в точке с абсциссой $x_1 = 0$ уравнение касательной принимает вид $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, т. е. $y = x$. Мы видим, что касательная к синусоиде в точке (0; 0) есть биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 2);

2) в точке с абсциссой $x_2 = \frac{\pi}{2}$ уравнение касательной будет $y - 1 = 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $y = 1$. Это горизонтальная прямая (рис. 2);

3) аналогично, уравнение касательной в точке с абсциссой $x_3 = \pi$ будет $y - 0 = (-1)(x - \pi)$, т. е. $y = \pi - x$.

Упражнения

Найдите производную функции:

15. $f(x) = 1{,}3 \cos x$.

16. $h(x) = 3\cos(2{,}3x - 10\pi)$.

17. $g(x) = 2\pi - 0{,}5\cos(\pi - x)$.

18. $u(x) = 2x^2 - 30\cos(5x + 6)$.

19. $v(x) = -2\cos(x - \pi) + 2\sin 2x$.

20. $v(x) = 5\,\mathrm{tg}(2x + 3) + 2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

21. $s(x) = 3\,\mathrm{tg}(2x + 1)$.

22. $s(x) = \frac{2\sin(6x+3)}{\cos(6x+3)} + \mathrm{tg}(6x+3)$.

23. $f(u) = \cos 2u \sin u + \sin 2u \cos u$.

24. $g(t) = \cos 2\pi \cos 3t + \sin 3t \sin 2\pi$.

25. $v(t) = 4\,\mathrm{ctg}(2t + 3)$.

26. $v(x) = 7\,\mathrm{ctg}(2x - 2\pi)$.

27. $f(x) = \cos 2{,}5x \cdot \sin 0{,}5\pi + \sin 2{,}5x \cdot \cos 0{,}5\pi$.

28. $f(x) = \sin x \cos 5x - \sin 5x \cos x$.

Напишите уравнение касательной к графику функции:

29. $f(x) = \sin x$ в точках с абсциссами $-\pi$ и $\frac{\pi}{2}$.

30. $s(x) = \cos x$ в точках с абсциссами $-\frac{\pi}{2}$ и 2π.

31. $g(x) = \mathrm{tg}\, x$ в точках с абсциссами 0 и $\frac{\pi}{4}$.

77*. Непрерывность тригонометрических функций

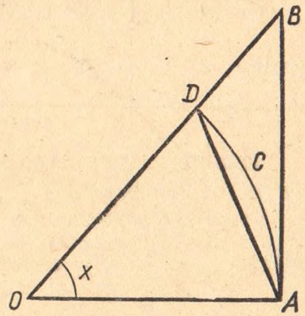

Рис. 3

В п. 75 мы опирались на допущение о непрерывности функции cos. Докажем это допущение, а также непрерывность функций sin, tg, ctg во всех точках, где они определены. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма. ***Для всех x, удовлетворяющих условию***

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

справедливо неравенство:

$$|\sin x| < |x| < |\mathrm{tg}\, x|. \qquad (1)$$

Доказательство начнем со случая $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Сравним площади S_{OAD} (треугольника OAD), S_{OAB} (треугольника OAB) и S_{OACD} (сектора $OACD$) (рис. 3). Эти площади легко вычисляются

$$S_{OAD} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OD| \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |AB| = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x,$$

$$S_{OACD} = \frac{1}{2} r^2 \cdot x = \frac{1}{2}x.$$

Из рисунка 3 видим, что

$$S_{OAD} < S_{OACD} < S_{OAB},$$

или

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x,$$

т. е.

$$\sin x < x < \mathrm{tg}\, x. \qquad (2)$$

Так как $\sin x$ и $\mathrm{tg}\, x$ положительны при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ неравенство (1) справедливо.

* Звездочкой отмечен дополнительный учебный материал, не обязательный для изучения всеми учащимися. В ряде случаев такой материал отмечен двумя треугольниками: ▶ (в начале), ◀ (в конце). См. стр. 15—17 и др.

Докажите тождество:

374. $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

375. $\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+1}=\sin 2\alpha$.

376. $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

377. Верно ли равенство: $\sin 15^\circ \cos 15^\circ=\frac{1}{4}$?

378. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\sin\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=3\frac{3}{7}$ и $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

Докажите тождество:

379. $\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\cos\beta}-\operatorname{tg}\beta$.

380. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{ctg}\alpha$.

381. Выразите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и вычислите их, если $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решите уравнение:

382. $\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=0{,}25$.

383. $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$.

384. $4(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

385. $\sin x+\sin 3x=0$.

386. $\cos 2x-\cos 6x=0$.

387. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$.

Представьте в виде суммы:

388*. $\sin(2x+y)\cos(x+2y)$.

389*. $\cos(2\alpha-\beta)\cos(2\alpha+\beta)$.

390*. $\sin(2x-y)\sin(x+2y)$.

391*. $4\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}$.

Глава VII ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 19. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

97. Первообразная

Вспомним пример применения операции дифференцирования в механике. Если в начальный момент времени $t=0$ скорость тела $v(0)=0$, то при свободном падении тело в обычной земной обстановке к моменту времени t пройдет путь

$$s(t)=\frac{g}{2}t^2. \qquad (1)$$

Дифференцированием находим скорость:

$$s'(t)=v(t)=gt. \qquad (2)$$

Второе дифференцирование дает ускорение:

$$v'(t)=a(t)=g. \qquad (3)$$

Оказывается, что ускорение постоянно.

В этой задаче формула (1) была найдена Галилеем из опыта. Но более типично для механики другое положение: задан закон, которому подчиняется ускорение (в нашем случае оно постоянно). Требуется найти закон изменения скорости $v(t)$ и найти координату $s(t)$.

Для этого служит операция интегрирования, обратная операции дифференцирования. С ней мы познакомимся в этой главе.

Перейдем к определениям.

Определение. *Функция F называется первообразной на заданном промежутке для функции f, если для всех x из этого промежутка*

$$F'(x) = f(x). \qquad (4)$$

Пример 1. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $]-\infty; \infty[$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$ для всех $x \in]-\infty; \infty[$.

Легко заметить, что $\frac{x^3}{3} + 7$ имеет ту же самую производную x^2. Поэтому и функция $\frac{x^3}{3} + 7$ есть первообразная для x^2 на $\boldsymbol{R}$. Ясно, что вместо 7 можно поставить любую постоянную.

Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной не однозначна, она имеет бесконечно много решений. В следующем пункте вы увидите, как найти все эти решения.

Пример 2. Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $]0; \infty[$ первообразной будет функция $F(x) = 2\sqrt{x}$, так как $F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$ для всех x из этого промежутка. Так же как и в примере 1, функция $2\sqrt{x} + C$ при любой постоянной C есть первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ на том же промежутке $]0; \infty[$.

Упражнения

Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на указанном промежутке, если:

392. а) $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x$, $x \in]-\infty; \infty[$.

393. а) $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 5$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = 4 - \cos x$, $f(x) = \sin x$, $x \in]-\infty; \infty[$.

394. а) $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = \operatorname{tg} x - \sqrt{2}$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

395. а) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = 3 - \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in]0; \pi[$.

396. а) $F(x) = 14 - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in]-\infty; 0[$;

б) $F(x) = 9 - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in]0; \infty[$.

397*. а) $F(x) = |x|$, $f(x) = 1$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = |x|$, $f(x) = -1$, $x \in]-\infty; 0[$.

Найдите первообразную для функции f на $\boldsymbol{R}$, если:

398. $f(x) = x^3$.

399. $f(x) = x^4$.

400. $f(x) = x$.

401. $f(x) = 2\frac{1}{2}$.

98. Основное свойство первообразной

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи основную роль играет следующая лемма.

Лемма (признак постоянства функции). ***Для того чтобы функция была постоянной на интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная равнялась нулю на этом интервале.***

Доказательство необходимости следует из того, что производная постоянной равна нулю. Достаточность следует из таких наглядных геометрических соображений: если график функции во всех точках имеет горизонтальную касательную, то он должен совпадать с некоторым отрезком горизонтальной прямой.

Докажем теперь основное свойство первообразных.

Теорема. ***Если функция F есть первообразная для функции f на промежутке I, то при любой постоянной C функция***

$$F(x) + C \qquad (1)$$

также является первообразной для функции f на промежутке I. Любая первообразная функции f на промежутке I может быть записана в виде $F(x) + C$.

Для доказательства теоремы надо проверить два факта: 1) какую бы постоянную в формуле (1) ни поставить вместо C, получится первообразная для функции f; 2) какую бы первообразную для функции f ни взять, ее можно получить из формулы (1) при соответствующем подборе постоянной C.

Первое утверждение проверяется простым подсчетом. Так как $F'(x) = f(x)$ для всех x из интервала I, то для всех x из этого интервала $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$, т. е. $F(x) + C$ есть первообразная для функции $f(x)$.

Для доказательства второго утверждения воспользуемся признаком постоянства функции. Пусть Φ — еще одна первообразная

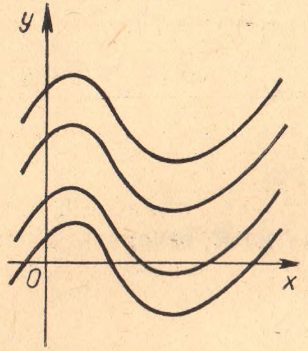

Рис. 46

для функции f на том же интервале I, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ для всех x из интервала I. Тогда для всех x из интервала I имеем:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отсюда следует, в силу признака постоянства функции, что разность $\Phi - F$ есть функция, постоянная на интервале I.

Таким образом,

$$\Phi - F = C, \text{ или } \Phi = F + C,$$

что и требовалось доказать.

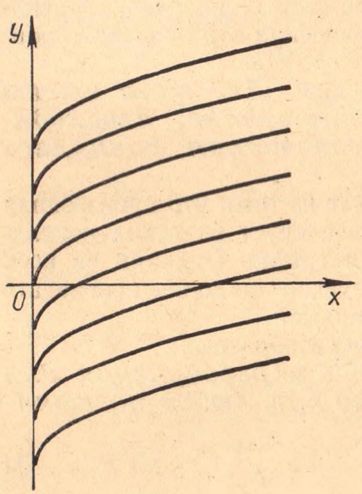

Рис. 47

Геометрически основное свойство первообразных может быть выражено так: ***графики всех первообразных функций f получаются из любого из них параллельным переносом вдоль оси Oy*** (рис. 46).

Пример. Найдем для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ первообразную, график которой проходит через точку M (9; —2).

Любая первообразная функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ записывается в виде

$$2\sqrt{x} + C.$$

На рисунке 47 изображены графики этих первообразных. Найдем среди них график, проходящий через точку M (9; —2). Для этого решим уравнение

$$-2 = 2\sqrt{9} + C.$$

Получаем $C = -8$. Следовательно, искомая первообразная имеет вид:

$$2\sqrt{x} - 8.$$

Выражение $-\cos x + C$ называют «общим видом» первообразных для функции sin. Аналогично и для других функций.

Ниже приводится таблица первообразных для степенной и некоторых тригонометрических функций.

$f(x)$	x^a $(a \neq -1)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Проверьте ее самостоятельно по образцу упражнений 392—396. При этом надо иметь в виду, что для степенной функции x^a при целых a это есть следствие теоремы из п. 48, а для остальных показателей a формула будет установлена в п. 115.

Упражнения

Найдите для функции f первообразную, график которой проходит через заданную точку:

402. $f(x) = x^3$, M (2; 1).

403. $f(x) = \sin x$, M (0; 3).

404. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

405. $f(x) = -2$, M (3; 5).

406. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $M\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

407. $f(x) = \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

408. График одной из первообразных функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ проходит через точку (1; 2), а второй — через точку (8; 4). График какой из них расположен выше? Какова разность этих первообразных?

99. Три правила нахождения первообразных

Правила отыскания первообразных похожи на соответствующие правила вычисления производных.

Теорема 1. ***Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.***

Действительно, так как $F' = f$ и $G' = g$, то по правилу вычисления производной суммы имеем:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. ***Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то kF есть первообразная для kF.***

Так как $F' = f$, то по правилу вычисления производной

$$(kF)' = kF' = kf.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. ***Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k и b — постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.***

Так как $F' = f$, то по правилу вычисления производной от сложной функции имеем:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b).$$

Теорема 3 доказана.

Приведем примеры на использование этих теорем.

Пример 1. Найдем все первообразные для функции $x^3 + \frac{1}{x^2}$.

Так как для функции x^3 одна из первообразных есть $\frac{x^4}{4}$, а для функции $\frac{1}{x^2}$ одной из первообразных является $-\frac{1}{x}$, то, по теореме 1, для функции $x^3 + \frac{1}{x^2}$ первообразной будет $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$.

Общий вид первообразных есть

$$\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$$

Пример 2. Найдем одну из первообразных для функции $5\cos x$.

Так как для функции $\cos x$ одна из первообразных есть $\sin x$, то, по теореме 2, искомая первообразная есть $5\sin x$.

Пример 3. Найдем одну из первообразных для функции $\sin(3x-2)$.

Так как для функции $\sin x$ одной из первообразных является $-\cos x$, то, по теореме 3, искомая первообразная равна $-\frac{1}{3}\cos(3x-2)$.

Пример 4. Найдем одну из первообразных для функции $\frac{1}{(7-3x)^5}$.

Так как для функции $\frac{1}{x^5}$ первообразной будет $\frac{-1}{4x^4}$, то, по теореме 3, искомая первообразная есть $\frac{1}{-3} \cdot \frac{-1}{4(7-3x)^4} = \frac{1}{12(7-3x)^4}$.

Пример 5. Найдем одну из первообразных для функции $x^2 - 5\sqrt{x} + \frac{2}{\cos^2 3x}$.

Как и в предыдущих примерах, при помощи теорем 1—3 находим, что искомая первообразная есть $\frac{x^3}{3} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} 3x$.

Упражнения

Найдите первообразные для функции:

409. $5x^2 - 1$.

410. $\frac{1}{x^2} - 4\sin x$.

411. $\frac{5}{\sqrt{2x+7}}$.

412. $\frac{3}{\cos^2 5x}$.

413. $\frac{2}{\sin^2 3x}$.

414. $1 - \cos 3x$.

415. $7\sin\frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}$.

416*. $\frac{4}{\sqrt[3]{(5-2x)^2}} - \cos\frac{x}{2}$.

417*. $2\sin\frac{x}{10} - \frac{5}{(3x-1)^3}$.

418*. $7 - 3x + x^3 - \frac{5}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

100. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана неотрицательная непрерывная функция f. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ оси Ox и перпендикулярами, проведенными к оси Ox в точках a и b (рис. 48). Эта фигура называется криволинейной трапецией. В этом пункте мы будем вычислять площади таких фигур.

Пример 1. Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x) = x^2$, отрезком $[1; 2]$ оси Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 2$ (рис. 49).

Возьмем $x \in [1; 2]$ и рассмотрим часть этой криволинейной трапеции, расположенную левее точки x (рис. 50).

Площадь этой фигуры, заштрихованной на рисунке 50, обозначим $S(x)$. Тем самым на отрезке $[1; 2]$ определена функция $S(x)$. Вычислим производную этой функции. Чтобы не осложнять вычислений, приведем наглядную схему вычисления для случая $\Delta x > 0$. Тогда

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$

есть площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 51. Очевидно, что

$$\text{пл. } ABCD < \Delta S(x) < \text{пл. } ECDN,$$

или

$$x^2\Delta x < \Delta S(x) < (x+\Delta x)^2 \Delta x, \text{ т. е. } x^2 < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < (x+\Delta x)^2,$$

$$0 < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - x^2 < 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Отсюда видно, что при Δx, стремящемся к нулю, дробь $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ имеет предел, равный x^2. Следовательно,

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = x^2.$$

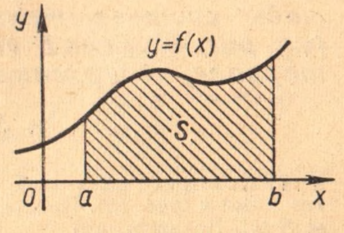

Рис. 48

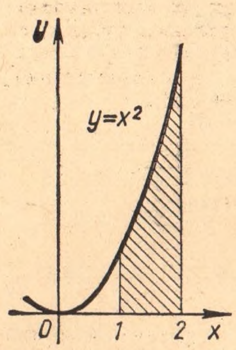

Рис. 49

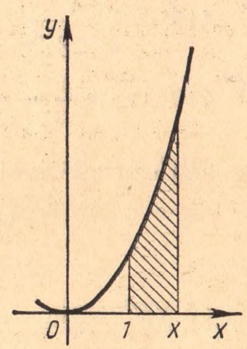

Рис. 50

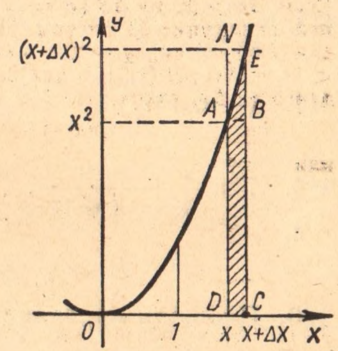

Рис. 51

Таким образом, $S(x)$ есть первообразная для функции x^2 и потому в силу основного свойства первообразных может быть записана в виде $\frac{x^3}{3}+C$. Для определения постоянной C заметим, что $S(1) = 0$, так как при $x = 1$ фигура на рисунке 50 превращается в вертикальный отрезок, площадь которого равна нулю. Поэтому постоянную C надо выбрать так, чтобы $S(1) = \frac{1^3}{3} + C = 0$, откуда получаем, что

$$C = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$S(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Искомая же площадь есть

$$S(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Рассуждения, приведенные выше, сохраняются и в общем случае.

Теорема 1. ***Пусть f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция и S есть площадь соответствующей криволинейной трапеции (см. рис. 48). Если F есть первообразная для f на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$, то***

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Рассмотрим часть этой криволинейной трапеции, расположенную левее точки x (рис. 52). Площадь этой фигуры есть функция от x — обозначим ее $S(x)$. Докажем, что

$$S'(x) = f(x). \qquad (2)$$

Если $\Delta x > 0$, то $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ есть площадь заштрихованной на рисунке 53 фигуры. Поскольку функция f непрерывна в точке x, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) - \varepsilon < f(x + \Delta x) < f(x) + \varepsilon$ для любых Δx, таких, что $|\Delta x| < \delta$. Следовательно, для всех Δx, таких, что $0 < \Delta x < \delta$ (как это видно из рис. 53),

$$\text{пл. } ABCD < \Delta S(x) < \text{пл. } KMCD$$

или

$$(f(x) - \varepsilon)\Delta x < \Delta S(x) < (f(x) + \varepsilon)\Delta x,$$

т. е.

$$f(x) - \varepsilon < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x) + \varepsilon. \qquad (3)$$

Аналогично проверяется, что полученное неравенство сохраняется и для всех отрицательных Δx, удовлетворяющих неравенству $-\delta < \Delta x < 0$. Итак, неравенство (3) выполняется для всех Δx, таких, что $0 < |\Delta x| < \delta$, это означает по определению предела, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

А так как по определению производной

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x},$$

то формула (2) получена.

Итак, мы получили, что функция $S(x)$ есть первообразная для функции f и потому в силу основного свойства первообразных $S(x) = F(x) + C$, где C — постоянная. Для нахождения постоянной C заметим, что $S(a) = 0$, так как при $x = a$ фигура, заштрихованная на рисунке 52, превращается в вертикальный отрезок, площадь которого равна нулю. Поэтому постоянную C надо подбирать так, чтобы выполнялось равенство

$$S(a) = F(a) + C = 0. \text{ Отсюда } C = -F(a).$$

Следовательно,

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (4)$$

А так как площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке 48, есть $S(b)$, т. е. $S = S(b)$, то из формулы (4) при $x = b$ получаем формулу (1).

Вы видели, что нахождение производной функции в большинстве случаев связано лишь с трудностями вычислительного характера. Нахождение же первообразных связано со значительными трудностями. Более того, не сразу ясно, имеет ли данная функция первообразную или не имеет. В связи с этим отметим, что любая непрерывная на промежутке I функция имеет

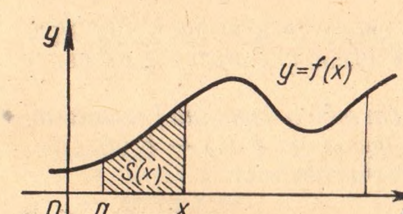

Рис. 52

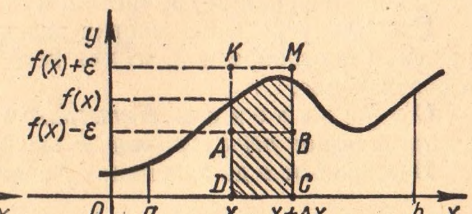

Рис. 53

первообразную. Однако может оказаться, что первообразную некоторой функции достаточно простого вида нельзя записать в виде композиции изучаемых в школе функций. Так обстоит дело, например, для функции $y = 2^{x^2}$. Подробнее об этом рассказывается в п. 106.

Упражнения

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

419. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

420. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

421. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

422. $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

423. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

424. $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$.

§ 20.

ИНТЕГРАЛ

101. Формула Ньютона — Лейбница

В предыдущем пункте вы видели, что вычисление площади криволинейной трапеции сводилось к следующему: для заданной функции пишется первообразная и вычисляется приращение первообразной. Далее вы увидите, что к таким вычислениям сводится решение многих задач. Так как у функции первообразных бесконечно много, то естественно возникает вопрос, не зависит ли результат таких вычислений от выбора первообразной? Оказывается, нет. В самом деле. Пусть F и Φ есть первообразные функции f на промежутке I. Тогда в силу основного свойства первообразных существует такая постоянная C, что $\Phi(x) = F(x) + C$ для всех $x \in I$. Следовательно, если числа a и b принадлежат промежутку I, то $\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$, т. е. приращения этих первообразных равны.

Получается, что приращение первообразной зависит только от заданной функции f и чисел a и b.

Поскольку решение многих задач сводится к вычислению приращения первообразной, то для него введено специальное название и обозначение.

Определение. *Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции*: $F(b) - F(a)$.

Интеграл от a до b функции f обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс». Числа a и b называются *пределами интегрирования*, a — *нижним*, b — *верхним*. Знак $\int$ называется *знаком интеграла*. Функция f называется *подынтегральной функцией*, а переменная x — *переменной интегрирования*. Отрезок с концами a и b называется *отрезком интегрирования*. Подчеркнем, что верхний предел интегрирования b не обязательно больше нижнего предела интегрирования a, может быть и $a > b$ и $a = b$.

Итак, по определению интеграла*, если $F' = f$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Это равенство называется формулой Ньютона—Лейбница.

Пример 1. Вычислим

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx.$$

Поскольку для функции $f(x) = x^2$ первообразной будет функция $\frac{x^3}{3}$, то

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Для удобства записи для приращения первообразной $F(b) - F(a)$ принято сокращенное обозначение $F(x)\big|_a^b$, т. е.

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b. \tag{2}$$

Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона — Лейбница обычно записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b. \tag{3}$$

Пример 2.

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

---

* Во многих учебных пособиях интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

с заданными пределами a и b называется «определенным интегралом». Делается это в тех пособиях, в которых первообразная или общее выражение первообразной в виде $F(x) + C$ называется «неопределенным интегралом». Тогда для отличия от «неопределенного интеграла» интегралу в принятом нами смысле приходится давать особое название — «определенный интеграл». Мы этой терминологией пользоваться не будем.

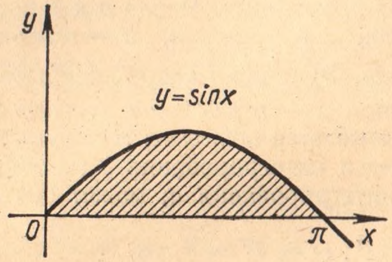

Рис. 54

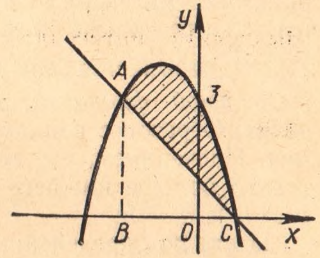

Рис. 55

Формулу (1) из п. 100 для площади криволинейной трапеции (рис. 48) мы теперь будем записывать так:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Таким образом, интеграл от неотрицательной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл интеграла.

Например, вычисления, проведенные в примере 2, показывают, что площадь, заштрихованная на рисунке 54, равна 2.

Пример 3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x$ и $y=3-2x-x^2$.

Нарисуем графики этих функций (рис. 55) и найдем абсциссы точек их пересечения из системы уравнений:

$$\begin{cases} y=1-x, \\ y=3-2x-x^2. \end{cases}$$

Приравнивая правые части, получаем уравнение $1-x=3-2x-x^2$, откуда $x=1$ и $x=-2$. Искомая площадь может быть получена как разность площадей криволинейной трапеции $BA3C$ и $\triangle BAC$.

По формуле (4)

$$S_{BA3C}=\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)\,dx=\left(3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=3-1-\frac{1}{3}-3\cdot(-2)+(-2)^2+\frac{(-2)^3}{3}=9;$$

$$S_{BAC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3=4\frac{1}{2}.$$

Следовательно, площадь заштрихованной фигуры

$$S=S_{BA3C}-S_{BAC}=4\frac{1}{2}.$$

Упражнения

Вычислите интеграл:

425. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

426. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

427. $\int_{-1}^{1} x^4\,dx$.

428. $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

429. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

430. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

431. $\int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$.

432. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

433. $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (сделав рисунок):

434. $y=x^3$, $x=1$, $x=3$, $y=0$.

435*. $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$.

436. $y=2+x-x^2$, $y=0$.

437. $y=\cos x$, $y=0$, $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

438. $y=x^2$, $y=2x$.

439*. $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.

102. Интеграл с переменным верхним пределом

Прежде всего, отметим, что интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(z)\,dz=\ldots$$

Это следует из формулы Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

и

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(t)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \text{ и т. д.,}$$

т. е. получается одно и то же число.

Рассмотрим теперь интеграл с переменным верхним пределом (его мы обозначим буквой x, а переменную интегрирования обозначим буквой t):

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Это есть функция от x. Покажем, что производная этой функции

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x). \qquad (1)$$

Действительно, по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

и потому

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - (F(a))' = f(x).$$

Из формулы Ньютона — Лейбница следует, что

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - F(a) = 0.$$

Поэтому интеграл от a до x

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

есть та первообразная функции f, которая в точке a обращается в нуль.

Первообразная, которая в точке a принимает значение q, записывается в виде

$$q + \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (2)$$

103*. Нахождение координаты по заданной скорости и скорости по заданному ускорению

Решим теперь задачу, поставленную в начале этой главы. Пусть точка движется по прямой. При этом координата x точки есть функция от времени движения t, т. е. $x = x(t)$. Было установлено, что скорость движения точки $v(t) = x'(t)$. Поэтому если нам известна скорость как функция от времени $v(t)$, то

$$\int_{t_0}^t v(t)\,dt = x(t) - x(t_0) \qquad (1)$$

в силу формулы Ньютона—Лейбница. Число $x(t_0)$ называют *начальной координатой* и обозначают через x_0. Тогда формулу (1) можно переписать в виде

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(z)\,dz. \qquad (2)$$

Это равенство показывает, как по известной скорости движения точки найти ее координату.

Эту же формулу можно получить из формулы (2) предыдущего пункта: $x(t)$ есть первообразная функции $v(t)$, принимающая в точке t_0 значение x_0.

Ускорение $a(t) = v'(t)$. Поэтому если известно ускорение движения точки как функция от времени, то

$$\int_{t_0}^t a(z)\,dz = v(t) - v(t_0) \qquad (3)$$

по формуле Ньютона—Лейбница. Число $v(t_0)$ называют *начальной скоростью* и обозначают через v_0. Тогда равенство (3) можно переписать в виде:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(z)\,dz. \qquad (4)$$

Полученная формула показывает, как по известному ускорению движения точки находится скорость этого движения. А зная скорость движения, мы по формуле (2) можем найти координату точки.

П р и м е р. Точка движется с постоянным ускорением a. В начальный момент времени t_0 точка имела начальную скорость v_0 и начальную координату x_0. Найдем координату точки как функцию от времени.

Сначала по формуле (4) находим скорость движения точки:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a\,dz = v_0 + az\Big|_{t_0}^t = v_0 + at - at_0 = v_0 + a(t - t_0),$$

а потом по формуле (2) находим координату

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + a(z - t_0))\,dz = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

*Упражнения**

440. Камень брошен вверх. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая ускорение силы тяжести $g \approx 9{,}8$, найдите:
1) наибольшую высоту подъема камня в зависимости от начальной скорости v_0; 2) скорость камня в самом верхнем положении; 3) через сколько времени камень упадет на землю.

441. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t = 0$ до $t = 5$, если скорость точки меняется по закону $v = 9{,}8t - 0{,}003t^2$. Найдите ускорение этой точки в конце пути (т. е. при $t = 5$).

442. Скорость движущейся точки меняется по закону $v = Rt + a\sqrt{t}$. Найдите путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от $t = 0$ до $t = 4$, и ускорение ее в конце пути.

443. а) Точка движется по параболе $y = x^2 - 2x + 3$ так, что ее проекция на ось абсцисс имеет постоянную скорость v. Для проекции этой точки на ось ординат найдите скорость и ускорение (через x).

б) Точка движется по графику функции $y = x^3 - 2x^2$ так, что ее проекция на ось абсцисс имеет постоянную скорость v. Найдите скорость и ускорение проекции этой точки на ось ординат.

104*. Интеграл как предел сумм

Мы определили интеграл как приращение первообразной:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где F — первообразная функции f. Существует другой подход к определению интеграла, о котором сейчас будет рассказано. Определив интеграл этим другим способом, можно потом доказать, что интеграл с переменным верхним пределом имеет своей производной подынтегральную функцию:

$$\left(\int_a^x f(z)\,dz\right)' = f(x). \qquad (1)$$

Именно на этом пути была доказана упомянутая в п. 100 теорема, в силу которой непрерывная на каком-либо промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.

Чтобы понять наглядно новый способ определения интеграла, будем считать $a < b$, а функцию f положительной и непрерывной на $[a; b]$. Тогда речь идет об определении площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 48.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Концы этих отрезков — точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$
$$x_k - x_{k-1} = \Delta x.$$

На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высоты $f(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна

$$f(x_{k-1}) \cdot \Delta x,$$

а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 56) равна

$$S_n(a; b) = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

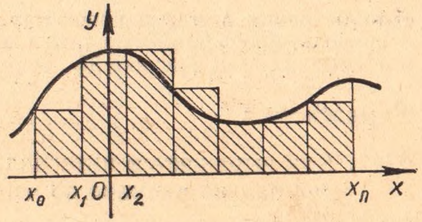

Рис. 56

В силу непрерывности функции f объединение построенных прямоугольников при большом n, т. е. при малом Δx, «почти совпадает» с интересующей нас криволинейной трапецией. Поэтому возникает предположение, что существует предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(a; b),$$

который и есть площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$, ограниченной сверху графиком функции f. Предположение это правильно.

В действительности предел S существует для любой (не обязательно положительной) непрерывной на $[a; b]$ функции f. Этот предел можно считать по определению интегралом f от a до b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n(a; b). \qquad (2)$$

Остается определить интеграл при $a \geqslant b$ формулами

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \text{ при } a > b$$

и доказать исходя из новых определений формулу (1). Из нее уже нетрудно доказать формулу Ньютона—Лейбница. При этом построении теории интеграла формула Ньютона — Лейбница появляется в самом конце, в то время как в принятом в нашем учебнике изложении она по существу выражала просто определение интеграла.

Формулу (3) можно употребить и для приближенного вычисления интеграла в тех случаях, когда явное аналитическое выражение первообразной неизвестно. Лучше, однако, воспользоваться суммами

$$S'_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right),$$

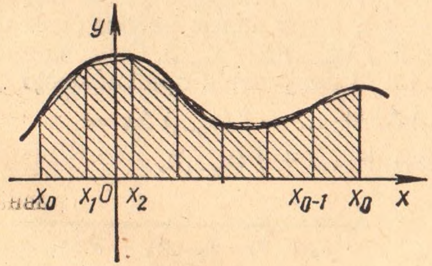

Рис. 57

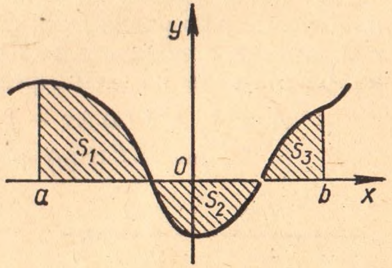

Рис. 58