Летнее дисциплинарное задание «Решение задач по математике»

Модуль 1.

Параллельность и перпендикулярность в пространстве.
Построение сечений. Углы и расстояния в пространстве.

1.1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = AA_1 = 2, AD = 4$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью α, которая проходит через вершину A и точки P и Q (середины ребер DD_1 и D_1C_1 соответственно) и вычислите:

a. площадь сечения;
b. косинусы углов между плоскостями боковых граней и плоскостью α;
c. расстояния от вершин параллелепипеда до плоскости α;
d. синусы углов, которые образуют прямые DC, BC, TC с плоскостью α.

1.2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 2, AD = AA_1 = 4$, точки M и Q - середины рёбер BB_1 и CD соответственно. Постройте площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую DM и параллельной прямой A_1Q.

a. Найдите площадь полученного сечения.
b. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью AA_1B_1B.
c. Найдите угол, который образует прямая CC_1 с плоскостью сечения.
d. Найдите угол между прямыми DM и A_1Q.
e. Найдите расстояние между прямыми DM и A_1Q.

1.3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 1, AD = \sqrt{3}, AA_1 = \sqrt{2}$, точки M и P - середины рёбер CD и A_1B_1 соответственно. Постройте площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку P параллельно прямым AC и B_1M.

a. Найдите площадь полученного сечения.
b. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости сечения.
c. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью AA_1D_1D.
d. Найдите угол, который образует прямая A_1D_1 с плоскостью сечения.
e. Найдите угол между прямыми AC и B_1M.

1.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку K, лежащую на ребре $AD\left(AK = 3DK\right)$, перпендикулярно прямой A_1M, где M - центр грани DD_1C_1C.

a. Найдите площадь полученного сечения.
b. Угол между плоскостью сечения и плоскостью AA_1D_1D.
c. Угол, который образует прямая AC с плоскостью сечения.

1.5. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $AD = 6$. Высота пирамиды совпадает с ребром SB и равна 3. Через ребро SC под углом $60°$ к плоскости основания проведена плоскость α.

a. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.
b. Вычислите угол между α и плоскостью SBC.
c. Найдите расстояние от вершины B до плоскости α.

1.6. В правильной треугольной пирамиде $DABC$, с вершиной D, высота в три раза меньше медианы основания и равна h. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания AK и перпендикулярной грани DAC.

a. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.
b. Найдите угол, который образует прямая AC с плоскостью сечения.

Модуль 2.

Свойства функций.

2.1. Исследуйте на чётность функцию.

a. $f(x) = 3x^6 - 5x^4 - 9$
b. $y = \dfrac{x^3 + x^2 + 5}{x^2 - 1}$
c. $f(x) = \dfrac{x^7 - 4x^3}{x^4}$

2.2. Найдите область определения функции:

a. $y = \dfrac{x}{x(x+5)+6}$;
b. $y = \sqrt{\dfrac{x-12}{x^2 - 16x + 48}}$;
c. $y = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-5}, x \ge 2 \\ \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}, x < 2 \end{cases}$.

2.3. Найдите множества значений функций:

a. $y=\sqrt{2+x-x^2}$

b. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+2}$

c. $f(x)=-x+2\sqrt{x}+1$

2.4. Найдите $f(19)$, если известно, что функция $y=f(x)$ чётная, имеет период 10 и на отрезке $[0;5]$ функция имеет вид $y=15+2x-x^2$.

Модуль 3.
Тригонометрические функции.

3.1. Найдите множество значений функции:

а). $f(x)=\sqrt{1+\sin x-2\cos^2 x}$

б). $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}+\sqrt{-\cos^2 3x}$

в). $f(x)=\sqrt{1-2\cos x}$

г). $f(x)=\sin^4 2x+\cos^4 2x$

д). $f(x)=\dfrac{\cos x+2}{2\cos x+1}$

е). $f(x)=\dfrac{1}{4\sin^2 x+3\sin x+2}$

3.2. Постройте графики функции:

а). $y=2\sqrt{\cos^2 x}$

б). $y=\sin\sqrt{x^2}$

в). $y=\left(\sqrt{tgx}\right)^2$

г). $y=\dfrac{ctgx}{|ctgx|}$

д). $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

3.3. Найдите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{9}{41}, \sin\beta = -\frac{40}{41}, \alpha$ - угол второй четверти, β - угол четвертой четверти.

3.4. Найдите значение выражения $\frac{2\sin^3\beta + 3\cos^3\beta}{5\sin\beta - \cos\beta}$, если $tg\alpha = -4$.

3.5. Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

3.6. Известно, что $tg\alpha + ctg\alpha = 2$. Найдите $tg^6\alpha - ctg^6\alpha$.

3.7. Вычислите:

а). $\frac{\sin^2 315^\circ \cdot \cos 300^\circ + tg(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ) \cdot \cos 150^\circ}$

б). $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - ctg\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$

в). $\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}$

3.8. Упростите выражение:

а). $\frac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) tg\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)}$

б). $\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)}$

в). $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha}$

г). $\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{1 - 2\sin^2\alpha}$

д). $3 - 4\cos(4\alpha - 3\pi) + \cos(5\pi + 8\alpha) - 8\cos^4 2\alpha$

е). $\frac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 1}$

ж). $\dfrac{ctg\left(\alpha-90^\circ\right)\left(\sin\left(\alpha-270^\circ\right)-\sin\left(180^\circ-\alpha\right)\right)}{tg\left(180^\circ+\alpha\right)\left(\cos\left(\alpha+360^\circ\right)+\sin\left(\alpha-360^\circ\right)\right)}$

Модуль 4.

Решение тригонометрических уравнений и неравенств. Отбор корней в тригонометрическом уравнении.

4.1. Решите уравнение:

а). $2+\sin 2x+\cos 2x=2\sin^2 x$

б). $\cos 4x=2+6\sin x\cos x$

в). $\sin^6 x=\cos 2x-\cos^6 x$

г). $8\cos x=17-15\sin x$

д). $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin x=\left|\cos x\right|$

4.2. Решите неравенство:

а). $\sin x\ge -0,5$.

б). $\cos\dfrac{x}{3}>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

в). $\sqrt{3}\cdot tg(3x+\dfrac{\pi}{6})\le 1$.

г). $\sin 2x<-\cos 2x$.

д). $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3\ge 0$.

4.3. Решите уравнение $\dfrac{\cos x-1}{\cos\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}+ctg^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)=0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;4\pi\right]$.

4.4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{3}+\sin 2x+3\cos x}{1+2\sin x}=-\sqrt{3}+\cos x$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;3\pi\right]$.

4.5. Решите уравнение $2\cos^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + tgx \cdot tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ и найдите корни, принадлежащие интервалу $(0; 2\pi)$.

4.6. Решите уравнение $\sin 5x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.