Глава III ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА, БЕСКОНЕЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

§ 5. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

12. Вводные замечания

1. Представления о числах складывались постепенно под влиянием требований практики. С давних пор числа употреблялись: а) при счете, б) при измерении величин.

Ответ на вопрос «сколько элементов содержит данное конечное множество?» всегда выражается либо натуральным числом, либо числом нуль (если множество пусто). Следовательно, множество

$$Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

всех неотрицательных целых чисел обслуживает все потребности счета.

Иначе обстоит дело при измерении величин. Расстояние между двумя селениями может равняться 3,5 километра, площадь комнаты — 16,45 квадратным метрам и т. п.

При помощи алгоритма деления любое дробное неотрицательное число $\frac{m}{n}$ ($m \geqslant 0$, $n > 0$ — целые) превращается в конечную или в бесконечную десятичную дробь:

$$\frac{1}{8} = 0{,}125;$$

$$\frac{11}{3} = 3{,}66666666\ldots .$$

Для единообразия мы будем конечные десятичные дроби дополнять справа бесконечной последовательностью нулей:

$$\frac{1}{8} = 0{,}12500000\ldots .$$

Целые числа будем тоже дополнять бесконечной последовательностью нулей справа от запятой:

$$17 = 17{,}00000\ldots .$$

Таким образом, мы видим, что любое неотрицательное рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби:

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

При этом a_0 есть целая часть числа r, а

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

его дробная часть.

2. Такое же представление годится и для отрицательных рациональных чисел. Только во избежание недоразумений целую часть отрицательного числа надо обозначать чертой (минусом) сверху. Например, число

$$-\frac{3}{2} = -2 + \frac{1}{2}$$

мы будем представлять себе записанным в виде

$$\bar{2}{,}500000000\ldots .$$

Аналогично

$$-0{,}789 = \bar{1}{,}21100000\ldots,$$

$$-117\frac{1}{3} = -117{,}3333\ldots = -118 + \frac{2}{3} = \overline{118}{,}66666\ldots .$$

Таким образом, ***любое рациональное число r представляется в виде бесконечной десятичной дроби:***

$$r = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots,$$

где a_0 — целое число, а целые числа a_k ($k = 1,2,3,\ldots$) лежат в пределах

$$0 \leqslant a_k \leqslant 9.$$

При этом a_0 есть целая часть числа r, а дробная часть числа r представляется бесконечной десятичной дробью

$$0, a_1a_2a_3\ldots .$$

3. Если целая часть числа x меньше целой части числа y, то само число x меньше числа y. Если целые части двух чисел равны, то для их сравнения приходится обращаться к их дробным частям. Например,

$$15{,}30405\ldots < 15{,}30410\ldots,$$

так как у этих чисел равны целые части и первые три десятичных знака после запятой, а четвертый знак после запятой у левого числа меньше: $0 < 1$.

П р а в и л о с р а в н е н и я бесконечных десятичных дробей:

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ldots < b_0,\ b_1b_2b_3\ldots\ ,$$

если $a_k < b_k$ и $a_i = b_i$ при всех $i < k$.

Заметьте, что это правило применимо при любых знаках целых частей a_0 и b_0. Например,

$$\bar{1},75000\ldots < \bar{1},75010\ldots\ .$$

З а м е ч а н и е. Записи чисел с отрицательными целыми частями применяют на практике при вычислениях с помощью логарифмов, где целую часть числа называют его *характеристикой*, а дробную — его *мантиссой*. В практических вычислениях, конечно, не выписывают бесконечных последовательностей нулей справа.

Упражнения

113. Запишите число в виде бесконечной десятичной дроби:

а) 7; б) 12,38; в) —7,935; г) $\frac{1}{4}$; д) $-\frac{1}{4}$; е) $-\frac{2}{3}$.

114. Сравните числа:

а) 17,586631 и 17,586897;
б) —2,37561 и —2,37571;
в) —0,786 и 0,687;
г) 0,2444444444... и 0,244.

13. Периодические десятичные дроби

В предыдущем пункте мы встретились с десятичными дробями, у которых, начиная с некоторого места, все знаки повторяются: 0,12500000... , 3,6666666... и т. п. Такие десятичные дроби называются периодическими.

О п р е д е л е н и е. *Бесконечная десятичная дробь*

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ldots$$

называется п е р и о д и ч е с к о й, *если существуют такие натуральные числа N и p, что*

$$a_{n+p} = a_n \text{ для всех } n \geqslant N.$$

Например, 3,6666666... есть периодическая десятичная дробь: для нее $N = 1$, $p = 1$ и $a_{n+1} = a_n = 6$ для всех $n \geqslant 1$. Число 0,12500000... тоже представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби: здесь $N = 4$, $p = 1$ и $a_{n+1} = a_n = 0$ для всех $n \geqslant 4$. Число $\bar{2}$,1783838383... тоже записано в виде бесконечной

периодической десятичной дроби: здесь $N = 3$, $p = 2$ и $a_{n+2} = a_n$ для всех $n \geqslant 3$, так как при нечетных n имеем $a_n = 8$, а при четных — $a_n = 3$. Периодические дроби принято записывать короче: вместо 3,66666666... пишут 3,(6), вместо 0,1250000000... пишут 0,125(0), вместо $\bar{2}$,17838383838383... пишут $\bar{2}$,17(83). Число, написанное в скобках, называют периодом; 3,(6) читается «три целых и шесть в периоде», $\bar{2}$,17(83) читается «два с минусом, семнадцать сотых и восемьдесят три в периоде».

Докажем теперь важную теорему.

Т е о р е м а 1. ***Каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью.***

При доказательстве достаточно рассматривать только неотрицательные числа, так как десятичные знаки после запятой в представлении числа r в виде дроби

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ldots$$

совпадают с десятичными знаками дробной части этого числа, а дробная часть рационального числа есть неотрицательное рациональное число.

Представление рационального числа в виде десятичной дроби получается в результате применения алгоритма деления. Рассмотрим пример. Будем делить 12 на 55:

$$\begin{array}{r|l}
12 & 55 \\
\underline{110} & \overline{0{,}218} \\
100 & \\
\underline{55} & \\
450 & \\
\underline{440} & \\
10 &
\end{array}$$

Получив два раза остаток 10, мы можем не вести вычисления дальше: как остатки, так и цифры в частном будут повторяться. Поэтому

$$\frac{12}{55} = 0{,}2\,(18).$$

В общем случае: при делении на произвольное натуральное число n возможно только n остатков

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1.$$

Поэтому какой-либо из них должен повториться после не более чем n шагов алгоритма.

З а м е ч а н и е. Бесконечные десятичные дроби с нулем в периоде получаются, если какой-либо остаток в алгоритме деления оказывается равным нулю. После этого, конечно, идут сплошь нулевые остатки.

Какие же периодические десятичные дроби являются представлениями рациональных чисел? Ответ оказывается простым: любые, кроме имеющих девятку периодом.

Теорема 2. ***Любая периодическая десятичная дробь,***

$$a_0{,}a_1a_2a_3\ldots,$$

не имеющая девятку периодом, является представлением какого-либо рационального числа, получающимся из этого числа в результате алгоритма деления.

Доказательства этой теоремы мы не даем. Несколько позднее мы научимся находить по бесконечной периодической десятичной дроби (за указанным исключением) обыкновенную дробь $\frac{m}{n}$, из которой заданная периодическая дробь получается.

Легко понять, почему, например, бесконечная дробь

$$0{,}23(9)$$

не может получиться в результате деления натурального числа m на натуральное число n. Допустив обратное, мы получили бы, что число $r = \frac{m}{n}$ должно удовлетворять неравенствам $r < 0{,}24$ и $r > \underbrace{0{,}2399\ldots9}_{k\ \text{знаков}}$ при любом k. Но тогда разность

$$0{,}24 - r,$$

будучи положительной, должна была бы быть меньше

$$0{,}24 - \underbrace{0{,}2399\ldots9}_{k\ \text{знаков}} = 10^{-k}$$

при любом k, что невозможно.

Упражнения

115. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби. Объясните, почему эта дробь является периодической:

а) $\frac{7}{3}$; б) $\frac{23}{30}$; в) $-\frac{3}{7}$; г) $-\frac{29}{11}$.

14. Действительные числа

О том, что множество Q рациональных чисел включается в более обширное множество R *действительных чисел*, уже говорилось в учебнике седьмого класса. Действительные не рациональные числа называются *иррациональными*. В качестве примера иррационального числа в учебнике седьмого класса приводилось число $\sqrt{2}$. Для него был указан алгоритм построения представляющей его бесконечной десятичной дроби:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots.$$

Строгая теория действительных чисел довольно трудна и не входит в программу средней школы. Но сейчас вы достаточно подготовлены для того, чтобы понять в общих чертах, как она может быть построена.

Основной замысел очень прост. Кроме периодических бесконечных десятичных дробей, существуют непериодические. Такова, например, дробь

$$0{,}101001000100001000001\ldots$$

(после первой единицы — один нуль, после второй — два и т. д.). Мы примем теперь, что каждая непериодическая бесконечная десятичная дробь является представлением некоторого нового числа. Множество всех этих чисел и есть множество всех иррациональных чисел. Вместе с рациональными числами иррациональные числа образуют множество R всех действительных чисел.

Таким образом, оказывается, что любое действительное число представляется бесконечной десятичной дробью. Соответствие

$$x \to a_0,\ a_1a_2a_3\ldots$$

между действительными числами и бесконечными десятичными дробями, не имеющими девять периодом, *взаимно однозначно*: каждому действительному числу x соответствует одна вполне определенная такая десятичная дробь и каждая такая десятичная дробь является представлением вполне определенного действительного числа.

Смысл неравенства между действительными числами определяется приведенным в п. 12 правилом сравнения бесконечных десятичных дробей. Для рациональных чисел такое определение неравенства равносильно известному вам еще из младших классов.

Остается определить для вновь введенных чисел арифметические операции сложения и умножения. Понятие о том, как это делается, будет дано в следующем пункте. Вычитание по-прежнему определяется как действие, обратное сложению, а деление — как действие, обратное умножению.

Чтобы теория действительных чисел была закончена, надо еще доказать, что для новых чисел неравенства и арифметические операции обладают теми же основными свойствами, которые нам известны для рациональных чисел: если $x < y$, то при любом z

$$x + z < y + z$$

и т. п.

Упражнения

116. Укажите рациональные числа среди чисел $-\frac{2}{3}$; 5; 4,2; —1,6; $\sqrt{6}$; $\sqrt{2}$; 0; 0,757557555755557... (в последнем числе: после первой семерки — одна пятерка, после второй — две и т. д.). Представьте каждое рациональное число в виде отношения $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$ и $n \in N$.

117*. Назовите несколько положительных значений переменной a таких, при которых значение выражения $\sqrt{a}$:

а) является иррациональным числом;

б) является рациональным числом.

15. Десятичные приближения к действительному числу по недостатку и по избытку и арифметические действия с действительными числами

1. Десятичные приближения по недостатку и по избытку с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. вводятся хорошо известным вам способом. Для числа

$$x = 5{,}3991\ldots$$

первые пять из них выписаны в следующей табличке:

$$\begin{aligned} 5 &\leqslant x < 5 + 1 = 6;\\ 5{,}3 &\leqslant x < 5{,}3 + 0{,}1 = 5{,}4;\\ 5{,}39 &\leqslant x < 5{,}39 + 0{,}01 = 5{,}4;\\ 5{,}399 &\leqslant x < 5{,}399 + 0{,}001 = 5{,}4;\\ 5{,}3991 &\leqslant x < 5{,}3991 + 0{,}0001 = 5{,}3992. \end{aligned}$$

Вообще, для числа

$$x = a_0,\ a_1a_2a_3\ldots$$

приближения с точностью до 10^{-n} имеют вид:

$$\text{по недостатку: } x_n = a_0,\ a_1a_2a_3\ldots a_n;$$

$$\text{по избытку: } x_n' = x_n + 10^{-n}.$$

З а м е ч а н и е. При записи приближений x_n и x_n' мы не пишем нули справа от значащих цифр. Но, выписав их, можно убедиться в том, что неравенства

$$x_n \leqslant x < x_n'$$

верны в смысле установленного в п. 12 правила сравнения бесконечных десятичных дробей. Например, по этому правилу действительно

$$5{,}3991000\ldots \leqslant 5{,}3991\ldots < 5{,}3992000\ldots,$$

каковы бы ни были следующие за данными нам десятичные знаки числа 5,3991...

2. Пусть даны два действительных числа x и y. Для их приближений по недостатку и по избытку с точностью до 10^{-n} верны неравенства

$$x_n \leqslant x < x_n',\quad y_n \leqslant y < y_n'.$$

Если бы x и y были рациональными числами, то из этих неравенств вытекало бы неравенство

$$x_n + y_n \leqslant x + y < x_n' + y_n'.$$

Но для действительных чисел, которые могут и не быть рациональными, нам надо еще о п р е д е л и т ь смысл сложения.

О п р е д е л е н и е. *С у м м о й действительных чисел x и y называется такое действительное число z, которое при любом целом неотрицательном n удовлетворяет неравенству*

$$x_n + y_n \leqslant z < x_n' + y_n'.$$

Можно доказать, что такое число существует и притом только одно. Мы ограничимся тем, что покажем, как это определение суммы позволяет находить ее приближенное значение с хорошей точностью. Пусть

$$x = 1{,}23001\ldots,\ y = 0{,}78044\ldots.$$

В этом примере (независимо от того, каковы дальнейшие десятичные знаки чисел x и y)

$$x_5 + y_5 = 2{,}01045 \leqslant x + y < x' + y_5 = 2{,}01047,$$

и мы можем написать четыре знака после запятой для суммы:

$$x + y = 2{,}0104\ldots.$$

Менее приятен случай

$$x = 0{,}14508\ldots,\ y = 0{,}85491\ldots,$$

$$x_5 + y_5 = 0{,}99999,\ x_5' + y_5' = 1{,}00001,$$

и мы так и не узнали даже целой части суммы! Тем не менее

$$\frac{(x_5 + y_5) + (x_5' + y_5')}{2} = 1{,}00000$$

является приближением к ней с точностью до 10^{-5}:

$$x + y = 1{,}00000 \pm 0{,}00001.$$

3. Вполне аналогично определяется произведение н е о т р и ц а т е л ь н ы х действительных чисел.

О п р е д е л е н и е. *П р о и з в е д е н и е м двух неотрицательных действительных чисел x и y называется такое действительное число z, которое при любом целом неотрицательном n удовлетворяет неравенствам*

$$x_ny_n \leqslant z < x_n'y_n'.$$

Можно доказать, что такое число существует и только одно. Если одно или оба числа отрицательны, то при определении их произведения надо воспользоваться известным вам правилом знаков.

В виде примера оценим квадрат числа

$$x = 1{,}4142\ldots.$$

В этом случае

$$x_4 = 1{,}4142,\quad x_4' = 1{,}4143;$$

$$x_4^2 = 1{,}99996164 \leqslant x^2 < (x_4')^2 = 2{,}00024449.$$

Мы видим, что квадрат нашего числа x очень близок к числу 2. Большего нельзя сказать, не зная дальнейших десятичных знаков числа x. В действительности при надлежащем их выборе мы получим число, квадрат которого точно равен двум.

Упражнения

118. Докажите, что числа 2,6 и 2,7 являются десятичными приближениями соответственно по недостатку и по избытку числа $\sqrt{7}$ с точностью до 0,1.

119. Найдите десятичные приближения с точностью до 0,1 по недостатку и по избытку для числа:

а) 0,2664; б) —1,27; в) $2-\frac{5}{6}$; г) $\sqrt{11}$.

120. Пусть x — некоторое действительное число, причем

$$3<x<4,$$
$$3{,}6<x<3{,}7,$$
$$3{,}60<x<3{,}61,$$
$$3{,}609<x<3{,}610,$$
$$3{,}6091<x<3{,}6092.$$

Выпишите четыре первых десятичных знака бесконечной десятичной дроби, которой задается число x.

121. Найдите три первых десятичных приближения по недостатку и по избытку и первые три десятичных знака числа:

а) $\frac{3}{14}$; б) $-\frac{10}{3}$; в) $\sqrt{3}$; г) $-\sqrt{3}$.

122. Известно, что $x=0{,}5638413\ldots$, $y=1{,}3414825\ldots$. Найдите пять первых десятичных знаков суммы $x+y$.

123. Известно, что $x=2{,}1468\ldots$, $y=1{,}5431\ldots$. Найдите два первых десятичных знака произведения x и y.

124. Найдите четыре первые значащие цифры суммы:

а) $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

125*. Найдите три первых десятичных знака произведения:

а) $\frac{1}{7}\cdot\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$.

16. Изображение чисел точками координатной прямой

1. В геометрии принимают, что расстояние между любыми точками при выбранной единице измерения выражается неотрицательным числом. При этом имеются в виду именно действительные неотрицательные числа. Если в учебнике для шестого класса говорится просто о числах, то это делается лишь потому, что учащиеся в шестом классе еще не знают никаких чисел, кроме рациональных.

Мы будем считать, что единица измерения расстояний уже выбрана, и для простоты будем называть числовое значение расстояния просто расстоянием. Таким образом, расстояние $|AB|$ между точками A и B есть просто неотрицательное действительное число.

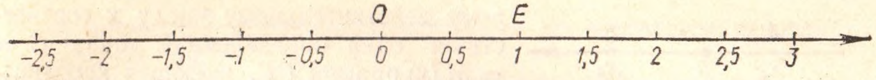

Рис. 1

Пусть O и E — точки на прямой и расстояние $|OE|=1$. Каждой точке C луча OE соответствует неотрицательное число $x_C=|OC|$. Одно из основных допущений курса геометрии состоит в том, что отображение (рис. 1, 2)

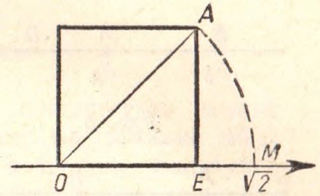

Рис. 2

$$C\to x_C$$

луча на множество R_0 неотрицательных действительных чисел обратимо: каждому неотрицательному действительному числу x соответствует одна вполне определенная точка $C=M(x)$, координата которой $x_C=x$.

Доказать это допущение, введенное в курсе геометрии в качестве аксиомы, нельзя, не заменив его каким-либо по существу равносильным допущением.

Полезно, однако, понять его наглядную основу. Будем считать, что мы умеем строить точки $M(x)$ для неотрицательных чисел, записывающихся конечными десятичными дробями. Возьмем какое-либо неотрицательное действительное число

$$x=a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

и рассмотрим отрезки

$$\Delta_n=[M(x_n);\ M(x_n')]$$

с концами, имеющими координаты x_n и x_n'. Отрезок Δ_n имеет длину 10^{-n}. Легко понять, что отрезки Δ_n вложены друг в друга:

$$\Delta_1\supset\Delta_2\supset\Delta_3\supset\ldots\supset\Delta_n\supset\Delta_{n+1}\supset\ldots.$$

Существо нашего допущения заключается в том, что существует одна и только одна точка C, принадлежащая всем отрезкам Δ_n. Она-то и является точкой $M(x)$ (рис. 3).

2. Точка O делит прямую на два луча: *положительный луч* OE и *отрицательный луч*. Если точка C принадлежит отрицательному лучу, то ее координатой служит число

$$x_C=-|OC|.$$

Отображение

$$C\to x_C,$$

определенное теперь на всей прямой OE, отображает эту прямую на множество R всех действительных чисел и тоже обратимо: каж-

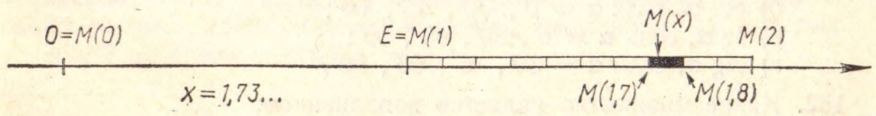

Рис. 3

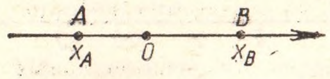

Рис. 4

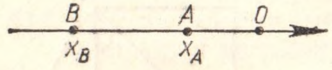

Рис. 5

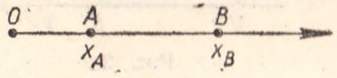

Рис. 6

дому действительному числу x соответствует одна определенная точка $C = M(x)$ прямой OE, имеющая координату $x_C = x$.

3. Пусть A и B — две точки координатной прямой. Расстояние $|AB|$ выражается через координаты точек A и B по формуле

$$|AB| = |x_B - x_A|.$$

Доказательство этой формулы проводится рассмотрением всех возможных случаев взаимного расположения точек A и B по отношению к начальной точке O.

Например, если $x_A < 0 < x_B$, то точка A принадлежит отрицательному лучу координатной прямой, а точка B — положительному. Точка O лежит на отрезке AB. Поэтому (рис. 4)

$$|AB| = |OA| + |OB| = -x_A + x_B = |x_B - x_A|$$

(x_B и $-x_A$ положительны). Другие случаи разберите сами (рис. 5, 6).

Упражнения

126. На координатной прямой постройте точки с координатами: $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$; $-1{,}6$; $0{,}7$. Найдите расстояния между этими точками.

127. Постройте отрезок длины $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$ (используйте теорему Пифагора).

128. Отметьте на координатной прямой точки с координатами: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}$.

129. Какие из чисел:

$$\frac{1}{7};\quad 6{,}4;\quad \sqrt{3};\quad \sqrt{0{,}81};\quad -8;\quad -\sqrt{5};\quad 0;\quad 27\frac{1}{3}$$

являются: а) целыми, б) дробными, в) рациональными, г) иррациональными?

130. Приведите пример квадратного уравнения, корни которого — иррациональные числа.

131. Рационально или иррационально число:

а) $\sin\alpha$, если $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°$;
б) $\cos\alpha$, если $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°$;
в) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°$;
г) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\alpha = 30°, 45°, 60°, 90°$?

132. Какое множество является дополнением:
а) множества целых чисел до множества рациональных чисел;

б) множества иррациональных чисел до множества действительных чисел?

133. Найдите объединение и пересечение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел.

17. Числовая прямая и числовая плоскость

1. Установленное взаимно однозначное соответствие между действительными числами x и изображающими их точками $M(x)$ координатной прямой позволяет рассуждать о числах, пользуясь геометрической терминологией.

Будем считать координатную прямую расположенной горизонтально и за положительное направление на ней выберем направление слева направо. Тогда неравенство $x < y$ обозначает, что точка $M(x)$ лежит слева от точки $M(y)$. Удобно говорить, что само число x лежит «левее» числа y. Если $x < z < y$, или $y < z < x$, то говорят (в обоих случаях), что число z лежит «между» числами x и y. Число

$$|y - x|,$$

выражающее расстояние между точками $M(x)$ и $M(y)$, удобно называть просто «расстоянием между числами x и y».

Само множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел называют «числовой прямой»*, а его элементы, т. е. числа, — «точками числовой прямой». Вы уже знакомы с числовыми множествами, называемыми «промежутками». Перечислим их:

Замкнутый промежуток (*или отрезок*) *с началом a и концом b*:

$$[a; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Открытый промежуток (*или интервал*) *с началом a и концом b*:

$$]a; b[= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}.$$

Полуоткрытые промежутки:

$$]a; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \leqslant b\};\quad [a; b[= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqslant x < b\}.$$

Число $b - a$ называется длиной промежутка.

Бесконечные промежутки (*лучи, полупрямые*):

$$]a; +\infty[= \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > a\};\quad [a; +\infty[= \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geqslant a\};$$
$$]-\infty; a[= \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < a\};\quad]-\infty; a] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leqslant a\}.$$

Числовая прямая: $]-\infty; +\infty[= \boldsymbol{R}$.

П р и м е р 1. Решить неравенство $|x - 7| \leqslant 2$.

Будем рассматривать выражение $|x - 7|$ как расстояние между точками x и 7. Тогда требование решить неравенство равносильно такому: найти множество точек, расстояние от которых до точки 7 не превосходит 2.

---

* Заметьте, что «координатных прямых» много, а «числовая прямая» одна — множество действительных чисел.

Рис. 7

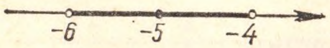

Рис. 8

На 2 единицы от точки 7 удалены точки 5 и 9 ($7-2=5$, $7+2=9$); менее чем на 2 единицы — точки, расположенные между ними (рис. 7). Значит, искомое множество решений неравенства есть отрезок $[5; 9]$.

Пример 2. Решить неравенство $|x+5|<1$. Данное неравенство равносильно неравенству $|x-(-5)|<1$. Решить неравенство $|x-(-5)|<1$ — значит найти множество точек, расстояние от которых до точки -5 меньше 1. Легко понять, что множество решений этого неравенства есть интервал

$$]-5-1; -5+1[, \text{ т. е. }]-6; -4[\text{ (рис. 8)}.$$

2. Начиная с младших классов вы пользовались для обозначения точек плоскости их координатами. Не будем вновь описывать, каким образом упорядоченной паре чисел $(x; y)$ ставится в соответствие точка $M(x; y)$ плоскости. Но теперь очевидно, что соответствие

$$(x; y) \to M(x; y)$$

между упорядоченными парами чисел и соответствующими точками плоскости взаимно однозначно.

Естественно поэтому множество упорядоченных пар действительных чисел называть *числовой плоскостью*, а любую упорядоченную пару действительных чисел — *точкой* числовой плоскости. Числовую плоскость принято обозначать символом $\boldsymbol{R}^2$ (читается: «эр два»). Обычная же геометрическая плоскость с выбранной на ней системой координат называется *координатной плоскостью*. Вы хорошо знаете, что на одной и той же плоскости можно многими способами выбрать систему координат и, значит, многими способами изображать точки числовой плоскости, которая сама по себе при этом не меняется — она остается просто множеством пар действительных чисел.

К точкам числовой плоскости можно применять геометрическую терминологию. Например: множество точек $(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax+by+c=0,$$

в котором хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, называется *прямой*.

Множество точек $(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2+y^2 \leqslant r^2 \ (r>0),$$

изображается в координатной плоскости кругом радиуса r с центром в начале координат, и поэтому в числовой плоскости это множество также называется *кругом* радиуса r с центром в точке $(0; 0)$.

Задача. Опишите на геометрическом языке множество:

$$\{(x; y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid (x-1)(y+1)=0\}. \qquad (1)$$

Так как

$$((x-1)(y+1)=0) \Leftrightarrow (x-1=0 \text{ или } y+1=0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=1 \text{ или } y=-1),$$

то данное множество является объединением множеств точек прямых $x=1$ и $y=-1$.

Замечание. Так как в этом учебнике рассматриваются лишь пары действительных чисел, то множество (1) можно записать и так:

$$\{(x; y) \mid (x-1)(y+1)=0\},$$

опуская указание на то, что $(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$.

Упражнения

134. Закончите доказательство равенства $|AB|=|x_B-x_A|$.

Найдите расстояние между точками координатной прямой:

135. $M(1, 5)$ и $M(-2)$.
136. $M(-10,3)$ и $M(6,2)$.
137. $M(-3,6)$ и $M(0)$.
138. $M(-5,7)$ и $M(-7,1)$.

Найдите множество решений:

139. а) $|x|=5$; б) $|x|<5$.
140. а) $|x-10|=4$; б) $|x-10| \leqslant 4$.
141. а) $|x| \geqslant 5$; б) $|x-10|>4$.

Запишите в виде уравнения или неравенства предложение с переменной и укажите множество значений переменной, при которых это предложение истинно:

142. Расстояние между точками $M(x)$ и $M(5)$ координатной прямой равно 2.
143. Расстояние между точками $M(a)$ и $M(-1)$ координатной прямой меньше 3,5.
144. Расстояние между точками $M(-4,5)$ и $M(y)$ не больше 0,2.
145. Расстояние между точками $M(-12)$ и $M(-b)$ не меньше $\frac{1}{48}$.

Опишите на геометрическом языке следующие множества и изобразите их в координатной плоскости:

146. а) $\{(x; y) \mid (x-2)(y+3)=0\}$; б) $\left\{(x; y) \,\middle|\, \frac{y-x}{x-1}=0\right\}$.
147. $\{(x; y) \mid x<0, \ y \geqslant -1\}$.

18*. Некоторые свойства множества действительных чисел

Если бы математика ограничилась лишь рациональными числами, она во многих отношениях была бы беднее содержанием (не существовало бы «точного» корня квадратного из двух, не каждая точка координатной прямой имела бы координату и т. д.). Но с чисто практической точки зрения, как уже отмечалось, изменение не столь велико. На практике можно было бы обойтись даже не всеми рациональными числами, а лишь теми, которые представимы конечными десятичными дробями.

В этом по существу и заключается свойство *плотности* подмножества рациональных чисел в множестве всех действительных чисел. Геометрически это свойство означает, что на любом отрезке координатной прямой лежит хотя бы одна рациональная точка (а значит, и бесконечное множество рациональных точек).

Отвлекаясь от реальных возможностей, можно сказать, что если в каждой рациональной точке зажечь по фонарику, то на прямой не окажется никакого темного промежутка, вся прямая будет светиться. Тем не менее на ней будет спрятано очень много иррациональных точек. В некотором смысле их даже «больше», чем рациональных.

Поясним смысл последнего утверждения. Все рациональные числа можно расположить в виде последовательности: (r_1; r_2; ... ...; r_n; ...), выписывая несократимые дроби $\frac{p}{q}$ в порядке возрастания суммы $|p|+q$, а при одинаковом значении этой суммы — в порядке возрастания числителя:

$$\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{-3}{2},$$
$$\frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{-5}{1}, \frac{-1}{5}, \dots$$

Полученное взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел и множеством N всех натуральных чисел показывает, что в известном смысле рациональных чисел «столько же», сколько и натуральных чисел. Немецкий математик Г. Кантор в 1874 г. доказал, что «занумеровать» аналогичным образом множество всех действительных чисел нельзя: какова бы ни была последовательность (x_1; x_2; ...; x_n; ...) действительных чисел, найдется действительное число x, не являющееся членом этой последовательности.

Подробнее об этом можно узнать из популярных и научных книг, посвященных теории бесконечных множеств. Теория множеств стала складываться в самостоятельную науку и вызвала всеобщий интерес математиков в конце XIX в., когда в ней появились интересные и неожиданные результаты, вроде указанных выше.

§ 6.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

19. Бесконечные числовые последовательности

С бесконечными числовыми последовательностями вы уже познакомились в VIII классе. Это, например, бесконечная геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем 2:

$$1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \dots$$

В предыдущем параграфе мы рассмотрели еще несколько примеров числовых последовательностей. С каждым действительным числом

$$\alpha = a, a_1a_2 \dots a_n \dots$$

связаны следующие последовательности:

1) десятичных знаков числа α: a_1; a_2; a_3; ... ; a_n; ... ;

2) десятичных приближений числа α по недостатку: $\alpha_1 = a, a_1$; $\alpha_2 = a, a_1a_2$; ... ; $\alpha_n = a, a_1a_2 \dots a_n$; ... ;

3) десятичных приближений числа α по избытку: $\alpha'_1 = a, a_1 + \frac{1}{10}$; $\alpha'_2 = a, a_1a_2 + \frac{1}{10^2}$; ... ; $\alpha'_n = a, a_1a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$; ... .

Задать бесконечную числовую последовательность — это значит задать соответствие, при котором каждому натуральному числу n (номеру) соответствует одно и только одно число (член последовательности с номером n). Это соответствие обычно записывают с помощью такой стрелки $\rightarrow$:

$$n \rightarrow u_n.$$

Например, если u_n есть десятичное приближение по недостатку числа $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$, то

$$1 \rightarrow u_1 = 1{,}4;\ 2 \rightarrow u_2 = 1{,}41;\ 3 \rightarrow u_3 = 1{,}414;\ \dots .$$

Такое соответствие есть не что иное, как функция, областью определения которой является множество $N = \{1; 2; 3; \dots\}$ всех натуральных чисел и значения которой принадлежат множеству R всех действительных чисел.

Определение. *Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве* N *натуральных чисел.*

Иначе это определение можно выразить так: числовой последовательностью называется отображение множества N в множество R.

Так как в этой главе мы будем заниматься лишь бесконечными числовыми последовательностями, то будем называть их просто последовательностями, опуская прилагательные «бесконечная» и «числовая».

Как и любую функцию, последовательность можно обозначить какой-нибудь буквой, например буквой f. Тогда $f(1)$ есть первый член последовательности, $f(2)$ — второй, ..., $f(n)$ — энный член последовательности. Обычно, однако, члены последовательности обозначают буквами, снабженными индексами:

$$f(1) = f_1;\ f(2) = f_2;\ \dots;\ f(n) = f_n;\ \dots .$$

Последовательность с n-м членом f_n часто обозначают так:

$$(f_1;\ f_2;\ \dots;\ f_n;\ \dots)$$

или более коротко: (f_n). В последнем обозначении подразумевается, что переменная n «пробегает» все множество N; например, геометрическая прогрессия, указанная в начале пункта, n-й член которой $f_n = 2^{n-1}$, записывается $(1;\ 2;\ 4;\ \dots;\ 2^{n-1};\ \dots)$ или (2^{n-1}).

Напомним основные способы задания последовательности.

1. Последовательность может быть задана аналитически при помощи формулы, указывающей, как по номеру n вычислить член последовательности x_n с этим номером.

Пример 1. $x_n = \frac{1}{2n-1}$; $n \in N$.

С помощью этой формулы можно вычислить любой член последовательности, например:

$$x_1 = \frac{1}{2\cdot 1 - 1} = 1;\quad x_{10} = \frac{1}{2\cdot 10 - 1} = \frac{1}{19};\ \dots .$$

Вместо слов «рассмотрим последовательность (x_n), заданную формулой $x_n = \frac{1}{2n-1}$» говорят короче: «рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{2n-1}$; $n \in N$» или просто «$x_n = \frac{1}{2n-1}$».

Пример 2. $x_n = 5$; $n \in N$.

У этой последовательности все члены совпадают: $(5;\ 5;\ \dots)$.

Последовательность, у которой все члены совпадают, называется постоянной последовательностью или просто постоянной.

2. Часто употребляется *рекуррентный* способ задания последовательности.

Пример 3. Если известно, что а) $x_1 = 1$ и б) при любом $n \geqslant 1$ имеем $x_{n+1} = (n+1)x_n$, то легко найти:

$$x_2 = 2;\ x_3 = 6;\ x_4 = 24;\ x_5 = 120;\ \dots .$$

Ясно, что условия а) и б) определяют значения x_n для любого натурального n, т. е. задают бесконечную последовательность. В рассматриваемом случае это хорошо известная вам последовательность $x_n = n!$.

В примере 3 мы имели дело с простейшей схемой рекуррентного определения последовательности:
1) указывается первый член x_1 последовательности;
2) дается формула, позволяющая по номеру $n \geqslant 1$ и члену последовательности с номером n вычислить член с номером $n+1$. Интуитивно достаточно ясно, что условия 1) и 2) позволяют вычислить любой член последовательности. Строгое доказательство этого утверждения может быть проведено с помощью принципа математической индукции.

Упражнения

148. а) Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

Найдите x_{10}, x_{25}, x_{n+1}, $x_{n+1} - x_n$.

б) Последовательность (b_n) задана формулой $b_n = \frac{n}{3^n}$.

Найдите b_3, b_5, b_{n+1}, $\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

149. Вычислите первые пять членов последовательности:

а) $y_n = 1 + \frac{1}{2^n}$; в) $a_n = 2 + \frac{3}{n}$;

б) $x_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$; г) $b_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$.

Для каких членов последовательности (y_n) выполняется условие:

150. $y_n > 200$, если $y_n = 2n - 5$?

151. $y_n \leqslant 30$, если $y_n = 3n - 100$?

152. Выпишите первые пять членов последовательности (x_n) и задайте эту последовательность формулой n-го члена, если:

а) $x_1 = -10$, $x_{n+1} = x_n + 5$, $n \geqslant 1$;

б) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = -x_n$, $n \geqslant 1$.

20. Геометрическое изображение последовательности и наглядные представления о пределе последовательности

Для геометрического изображения последовательностей пользуются двумя способами.

Первый способ. Так как последовательность (y_n) является функцией, то геометрически эту функцию можно изобразить с помощью ее графика, т. е. множества точек $M(n;\ y_n)$ координатной плоскости. Масштабы на осях координат удобно иногда выбирать различными.

Второй способ. Члены последовательности изображаются точками координатной прямой, снабженными соответствующими пометками.

Пример 1. $y_n = \frac{1}{n}$; $n \in N$.

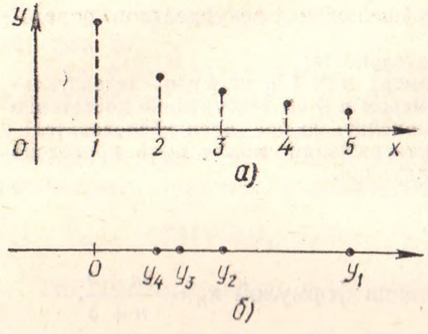

Рис. 9

На рисунке 9, *а*, *б* сопоставлены оба способа изображения этой последовательности.

Подчеркнем, что график последовательности состоит из отдельных точек, которые изображены на рисунке 9, *а*, а тонкие вертикальные линии проведены для наглядности и к графику не относятся.

При обоих способах изображения видно, что при возрастании номера n члены последовательности подходят все ближе к нулю. Более того, n-й член этой последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ «сколь угодно мало» отличается от нуля, если только его номер n является «достаточно большим» числом. Этот факт условимся записывать так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Говорят, что «предел последовательности (y_n) равен нулю».

Пример 2. $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $n \in N$.

Так как $|y_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, то и в этом случае при «достаточно больших n» члены последовательности (y_n) также «сколь угодно мало» отличаются от нуля. Но в отличие от предыдущего примера члены последовательности подходят к нулю, поочередно меняя знаки (рис. 10, *а*, *б*). И в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

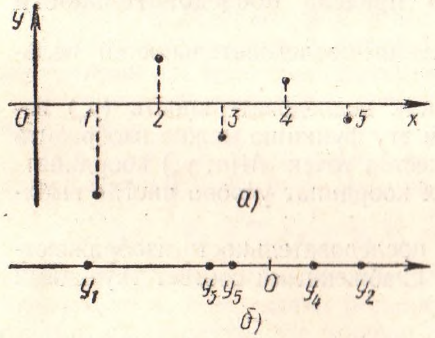

Рис. 10

Пример 3. $y_n = \frac{n-1}{3n}$; $n \in N$.

На рисунке 11, *а*, *б* видно, что члены этой последовательности при возрастании номера n «стремятся» к $\frac{1}{3}$. Это делается ясным, если записать n-й член последовательности в виде

$$y_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n};$$

при возрастании номера n второе слагаемое «стремится к нулю»,

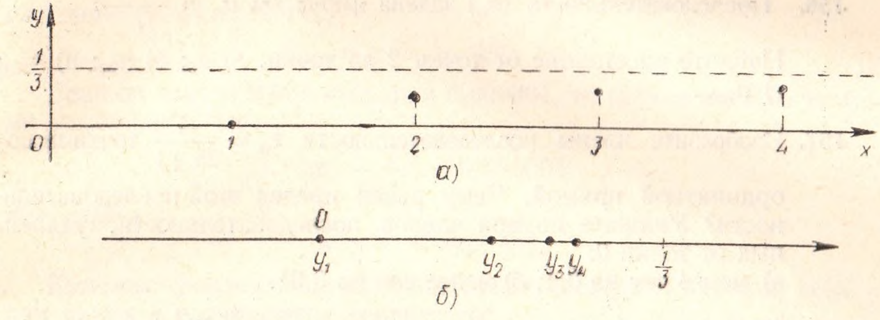

Рис. 11

поэтому разность $\frac{1}{3} - \frac{1}{3n}$ стремится к числу $\frac{1}{3}$. Записывают это следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Десятичные приближения по недостатку числа $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\alpha_1 = 0{,}3;\ \alpha_2 = 0{,}33;\ \alpha_3 = 0{,}333;\ \dots;\ \alpha_n = \underbrace{0{,}33\dots3}_{n \text{ десятичных знаков}};\ \dots$$

с возрастанием номера n все меньше отличаются от самого числа $\frac{1}{3}$.

Естественно считать, что предел этой последовательности равен $\frac{1}{3}$.

Вообще, для любого действительного числа α

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha'_n = \alpha.$$

Упражнения

Изобразите геометрически (двумя способами) последовательность (a_n):

153. а) $a_n = \frac{n^2}{2} - 6$; б) $a_n = \frac{2n+3}{n}$.

154. а) $a_n = (-1)^n n$; б) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$.

155. Изобразите геометрически каким-либо одним способом последовательность (x_n). Скажите, существует ли такое число, к которому «стремится» эта последовательность:

а) $x_n = n^2 + 1$; в) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$;

б) $x_n = \frac{10}{n}$; г) $x_n = \frac{5n + (-1)^{n+1}}{n}$.

156. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \frac{2n+3}{n}$.

Найдите расстояние от точки 2 до точки: а) a_5; б) a_{20}; в) a_{100}; г) a_{1000}.

157. Изобразите члены последовательности $z_n = \frac{1}{2n+1}$ точками координатной прямой. Чему равен предел этой последовательности? Укажите номера членов последовательности, удаленных от точки 0:
а) менее чем на 0,1; б) менее чем на 0,01.

158. Изобразите члены последовательности $y_n = \frac{3n-1}{n}$ точками координатной прямой. Как вы считаете, верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n} = 3$?

Укажите номера членов последовательности (y_n), которые удалены от числа 3: а) менее чем на 0,1; б) менее чем на 0,04.

21. Определение предела последовательности

Рассмотрим более подробно третий пример из предыдущего пункта. Какой точный смысл имеет утверждение: «При достаточно большом n значение выражения $y_n = \frac{n-1}{3n}$ сколь угодно мало отличается от $\frac{1}{3}$»?

Поставим для начала такой вопрос: каким должно быть n, чтобы модуль разности $y_n - \frac{1}{3}$ был меньше 0,001? Так как

$$\left| y_n - \frac{1}{3} \right| = \left| -\frac{1}{3n} \right| = \frac{1}{3n},$$

то вопрос сводится к тому, чтобы найти, при каких натуральных n выполнено неравенство

$$\frac{1}{3n} < 0{,}001.$$

Но это неравенство равносильно неравенству

$$3n > 1000,$$

или неравенству

$$n > 333\frac{1}{3}.$$

Получаем, что неравенство

$$\left| y_n - \frac{1}{3} \right| < 0{,}001$$

выполняется для любого

$$n > n_0 = 333.$$

Если бы вместо 0,001 мы взяли 0,000001, то такими же подсчетами установили, что

$$\left| y_n - \frac{1}{3} \right| < 0{,}000001$$

при любом

$$n > n_1 = 333\,333.$$

Возьмем произвольное положительное число ε и спросим себя, при каких n выполняется неравенство

$$\left| y_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \varepsilon. \qquad (1)$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$n > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

Так как нас интересуют только целые n, то ответ на наш вопрос таков: неравенство (1) выполняется при всех

$$n > N,$$

где N — целая часть числа $\frac{1}{3\varepsilon}$.

Разберите сами первый и второй примеры предыдущего пункта и установите, что в этих случаях для любого положительного числа ε найдется такое натуральное N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|y_n - 0| < \varepsilon.$$

Дадим определение предела последовательности.

Определение. *Число a называется **пределом последовательности** (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Говорят: «Последовательность (x_n) имеет пределом число a» и пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

О последовательности, имеющей предел, говорят, что она *сходится*.

Число N (в определении предела последовательности) зависит как от рассматриваемой последовательности, так и от взятого числа ε.

Докажем, что последовательности (α_n) и (α'_n) десятичных приближений числа α сходятся к этому числу:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha'_n = \alpha.$$

Если α — любое действительное число, (α_n) и (α_n') — последовательности его десятичных приближений соответственно по недостатку и по избытку, то

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{10^n} \text{ и } |\alpha_n' - \alpha| \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

Так как для любого положительного числа найдется натуральное число N такое, что $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ при $n > N$, то

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \text{ и } |\alpha_n' - \alpha| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \text{ и } \lim_{n\to\infty} \alpha_n' = \alpha.$$

Выясним геометрический смысл понятия предела последовательности. Неравенство (2) равносильно двойному неравенству:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

или

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \qquad (3)$$

Двойное неравенство (3) показывает, что все члены последовательности (x_n), сходящейся к числу a, с номерами $n > N$, т. е. члены

$$x_{N+1},\ x_{N+2},\ \ldots$$

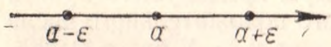

Рис. 12

попадают в интервал $]a - \varepsilon;\ a + \varepsilon[$ (рис. 12), который называется *ε-окрестностью точки a*.

Таким образом, *если число a является пределом последовательности (x_n), то в произвольную (как угодно малую) окрестность точки a попадают все члены данной последовательности, кроме конечного их числа.*

Упражнения

Докажите, что:

159. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$; в) $\lim \frac{3n-2}{2n} = 1{,}5$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{n} = 5$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

160. Какой предел имеет последовательность (проведите доказательство):

а) $a_n = \frac{5n-1}{2n}$; б) $b_n = \frac{3n^2+1}{n^2}$?

161. Пусть $x_n = c$, где c — некоторое число. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

162*. Докажите, что число 1 не является пределом последовательности

$$a_n = \frac{n+1}{2n}.$$

22. Единственность предела. Сходящиеся и расходящиеся последовательности

Интуитивно кажется правильным, что последовательность может иметь только один предел.

Теорема. ***Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.***

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Из определения предела вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие n_1 и n_2, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > n_1 \text{ и } |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > n_2.$$

Выберем номер n_0 большим, чем n_1 и n_2. Тогда

$$|x_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |x_{n_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$|a - b| = |(a - x_{n_0}) + (x_{n_0} - b)| \leqslant |a - x_{n_0}| + |x_{n_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Мы получили, что неотрицательное число $|a - b|$ меньше любого положительного числа ε. Но этому условию может удовлетворять только число нуль, т. е. $|a - b| = 0$, и, следовательно, $a = b$.

Итак, возможны только два случая: 1) у последовательности имеется предел, и тогда он единствен; такие последовательности называют *сходящимися*; 2) у последовательности нет предела; такие последовательности называют *расходящимися*.

Приведем примеры расходящихся последовательностей.

Пример 1. $x_n = n$; $n \in \boldsymbol{N}$.

Предположим, что последовательность (x_n) сходится и имеет пределом число a. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда по определению предела существует такой номер n_1, что для всех $n > n_1$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 1$, т. е. $|n - a| < 1$ для всех $n > n_1$. Запишем это в виде двойного неравенства:

$$-1 < n - a < 1$$

или

$$a-1<n<a+1 \text{ для всех } n>n_1.$$

Но неравенство $n<a+1$ для всех $n>n_1$ ложно, так как множество натуральных чисел неограничено.

Пример 2. $x_n=(-1)^n$; $n\in N$.

Как и в предыдущем примере, доказательство проведем от противного. Предположим, что последовательность x_n сходится к числу a. Возьмем окрестность $]a-\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2}[$ точки a. Так как длина этого интервала равна 1, то в него не могут попасть одновременно точки -1 и 1, поскольку расстояние между ними равно 2. Значит, вне окрестности $]a-\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2}[$ точки a находится бесконечное число членов последовательности, и потому число a не может быть пределом (x_n).

Упражнения

163. Докажите, что последовательность (x_n) сходится, а (y_n) расходится, если:

а) $x_n=\frac{6n-3}{3n}$; в) $y_n=(-1)^n+1$;

б) $x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$; г) $y_n=2n-1$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, если $|q|<1$

Рассмотрим несколько членов последовательности $c_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$:

$$c_1=\frac{1}{5};\quad c_2=\frac{1}{25};\quad c_5=\frac{1}{3125};\quad c_{10}=\frac{1}{9765625}.$$

Мы видим, что с увеличением номера члена последовательности его значение неограниченно уменьшается.

Возникает гипотеза, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0.$$

Покажем, что это действительно так, доказав более общее утверждение.

Теорема. ***Если** $|q|<1$, **то** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.*

Доказательство. Если $q=0$, то $q^n=0$ при любом n, и в этом случае теорема очевидна.

Для случая $q\neq 0$ предварительно установим одно вспомогательное неравенство. Так как по условию теоремы $|q|<1$, то

$\frac{1}{|q|}>1$ и $\frac{1}{|q|}$ можно записать в виде

$$\frac{1}{|q|}=1+\alpha, \text{ где } \alpha>0.$$

Возводя обе части равенства в степень n, получим:

$$\frac{1}{|q|^n}=(1+\alpha)^n.$$

Так как $\alpha>0$, то по неравенству Бернулли

$$\frac{1}{|q|^n}=(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha>n\alpha.$$

Поэтому

$$|q|^n<\frac{1}{n\alpha}. \qquad (1)$$

Это и есть нужное нам вспомогательное неравенство.

Вернемся к доказательству теоремы. Мы должны показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное N, такое, что из $n>N$ вытекает

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon.$$

Выберем $N\geqslant\frac{1}{\alpha\varepsilon}$. Тогда при $n>N$

$$n>\frac{1}{\alpha\varepsilon};\quad n\alpha>\frac{1}{\varepsilon};\quad \frac{1}{n\alpha}<\varepsilon$$

и в силу (1)

$$|q^n-0|=|q|^n<\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

164. Укажите такое натуральное число n_0 (хотя бы одно), чтобы при всех $n>n_0$ выполнялось неравенство:

а) $(0{,}3)^n<0{,}01$; в) $(0{,}99)^n<0{,}001$;

б) $(0{,}7)^n<0{,}01$; г) $(0{,}45)^n<0{,}001$.

24. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$

Пусть последовательность (x_n) является геометрической прогрессией со знаменателем q, где $|q|<1$ и $x_1\neq 0$. Тогда сумма S_n первых n членов этой прогрессии, как известно, вычисляется по формуле

$$S_n=x_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$

3 Заказ 311

Так как q^n при достаточно больших n становится сколь угодно малым числом, то естественно предположить, что S_n при возрастании номера n стремится к пределу

$$a = \frac{x_1}{1-q}.$$

Докажем это. Составим модуль разности $|S_n - a|$:

$$|S_n - a| = \left| x_1 \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} \right| = \left| \frac{x_1 q^n}{1-q} \right| = \left| \frac{x_1}{1-q} \right| \cdot |q|^n = \\ = |a| \cdot |q|^n.$$

Зададим произвольное положительное число ε и посмотрим, при каких n будет выполняться неравенство

$$|S_n - a| = |a| \cdot |q|^n < \varepsilon. \qquad (1)$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$|q|^n < \frac{\varepsilon}{|a|}. \qquad (2)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, то можно найти такое натуральное n_0, что при всех $n > n_0$ степень $|q|^n$ будет меньше любого наперед заданного положительного числа, в частности числа $\frac{\varepsilon}{|a|}$. Для всех таких n неравенство (1) будет выполняться.

Итак, *если знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет условию $|q| < 1$, то существует предел суммы n первых членов этой прогрессии, равный* $\frac{x_1}{1-q}$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}. \qquad (3)$$

Этот предел называют *суммой бесконечной геометрической прогрессии* и часто обозначают буквой S.

Пример. Найти сумму геометрической прогрессии $\left(2; -\frac{2}{3}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{27}; \ldots\right)$. Для этой прогрессии $x_1 = 2$; $q = -\frac{1}{3}$, т. е. $|q| = \frac{1}{3} < 1$, и потому ее сумму S находим так:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \quad S = \frac{3}{2}.$$

Упражнения

165. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

а) $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{8}; \ldots\right)$; б) $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$.

166. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (x_n), если известно, что:

а) $x_2 = \frac{5}{3}$; $q = \frac{2}{3}$; б) $x_2 = -\frac{5}{9}$; $q = -\frac{1}{9}$.

167. Найдите бесконечную геометрическую прогрессию (y_n), если известно, что:

а) $y_1 + y_2 = 12$; $S = 12{,}5$; б) $y_1 + y_2 = 0{,}8$; $S = \frac{5}{6}$.

25*. Понятие числового ряда

Вам известно, что

$$a_0,a_1a_2 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Бесконечную десятичную дробь $a_0,a_1a_2a_3 \ldots$, с помощью которой представляется число x, хотелось бы тоже понимать как сумму

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \qquad (1)$$

бесконечного числа слагаемых. Но мы не знаем, что означают слова «сумма бесконечного числа слагаемых»,— это надо определить. Наводящие соображения для такого определения могут быть следующими: обозначим через (x_n) последовательность десятичных приближений числа x по недостатку. Тогда

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}. \qquad (2)$$

В п. 20 было выяснено, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x. \qquad (3)$$

Поэтому естественно определить сумму бесконечного числа слагаемых (1), используя формулы (2) и (3).

Перейдем к определению понятий, связанных с суммой бесконечного числа слагаемых.

Определение. *Для заданной числовой последовательности (x_n) выражение*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

*называют **числовым рядом**, а x_n — n-м членом этого ряда.*

Определение. *Сумма n первых членов ряда называется n-й частичной суммой этого ряда и обозначается через* S_n:

$$S_1 = x_1;$$
$$S_2 = x_1 + x_2;$$
$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Определение. *Если существует предел последовательности (S_n) частичных сумм ряда, то говорят, что этот ряд сходится, а указанный предел называется суммой ряда.*

Таким образом, равенство (3) означает, что действительное число $\alpha = a, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ является суммой ряда

$$a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots ,$$

частичными суммами которого являются десятичные приближения

$$\alpha_n = a, a_1 a_2 \dots a_n = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

этого числа по недостатку.

Из результатов предыдущего пункта следует, что если знаменатель q геометрической прогрессии (x_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то ряд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots,$$

составленный из членов этой прогрессии, сходится и его сумма равна $\frac{x_1}{1-q}$:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \frac{x_1}{1-q}.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти сумму ряда

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots .$$

Последовательность (a_n), где $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, представляет собой геометрическую прогрессию, у которой $a_1 = 1$, $q = -\frac{1}{2}$. Так как $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то ряд сходится и его сумма

равна $\frac{a_1}{1-q}$. Поэтому

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Записать число 0,(8) в виде обыкновенной дроби. Число 0,(8) можно записать в виде ряда $\frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots + \frac{8}{10^n} + \dots$, члены которого представляют собой геометрическую прогрессию (b_n), причем $b_1 = \frac{8}{10}$, $q = \frac{1}{10}$. Этот ряд сходится ($|q| < 1$), и его сумма равна $\frac{b_1}{1-q}$. Отсюда имеем:

$$0,(8) = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \dots + \frac{8}{10^n} + \dots = \frac{0,8}{1-0,1} = \frac{8}{9}.$$

Пример 3. Представить дробь 0,2(35) в виде обыкновенной:

$$0,2(35) = \frac{2}{10} + \left(\frac{35}{10^3} + \frac{35}{10^5} + \frac{35}{10^7} + \dots\right).$$

В правой части равенства выражение в скобках является числовым рядом, члены которого представляют геометрическую прогрессию (c_n), у которой $c_1 = \frac{35}{10^3}$, $q = \frac{1}{100}$, так что этот ряд сходится:

$$0,2(35) = \frac{2}{10} + \left(\frac{35}{10^3} + \frac{35}{10^5} + \dots\right) = \frac{2}{10} + \frac{0,035}{1-0,01} = \frac{2}{10} + \frac{35}{990} = \frac{233}{990}.$$

Подобно тому как это сделано в примерах 2 и 3, любую периодическую десятичную дробь можно обратить в обыкновенную.

Упражнения

168. Найдите сумму ряда:

а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots;$

б) $\frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \frac{16}{625} - \dots + \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1} + \dots .$

169. Представьте в виде обыкновенной периодическую десятичную дробь:

а) 0,(5); в) 0,5(8);

б) 3,(27); г) 28,10(01).

170. В равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 1 *м*, вписан другой треугольник так, что его вершины находятся в серединах сторон первого треугольника. Во второй треугольник таким же образом вписан третий треугольник, в него — четвертый и т. д. до бесконечности. Найдите:
а) сумму периметров этих треугольников;
б) сумму площадей этих треугольников.

171. В круг радиуса R вписан квадрат; в квадрат вписан круг; в этот круг вписан второй квадрат и т. д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех квадратов.

172. Найдите сумму ряда:

$$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ldots+\left(-\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\ldots, \text{ зная, что } |x|>1.$$

§ 7. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЕДЕЛОВ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

26. Необходимое условие сходимости

Если последовательность (x_n) сходится к числу a, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ все ее члены, кроме конечного их числа, попадают в ε-окрестность точки a. Если, например, $\varepsilon = 1$, то за пределами соответствующей окрестности $]a-1;\ a+1[$ может оказаться лишь конечное число n_0 членов

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0}$$

этой последовательности (рис. 13). Поэтому существуют два числа m и M такие, что отрезок $[m; M]$ содержит уже все члены данной последовательности: $x_n \in [m; M]$ для всех $n \in N$.

Таким образом, всякая сходящаяся последовательность обладает следующим свойством: существует отрезок $[m; M]$, содержащий все члены этой последовательности. Последовательности, обладающие таким свойством, называют ограниченными.

О п р е д е л е н и е. *Последовательность (x_n) называется о г р а н и ч е н н о й, если существуют два числа m и M такие, что для всех n выполняется неравенство*

$$m \leqslant x_n \leqslant M.$$

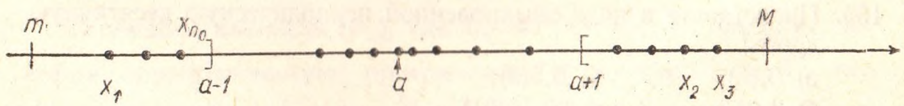

Рис. 13

Мы получили, что из сходимости последовательности следует ее ограниченность. Это означает, что ***ограниченность последовательности является необходимым условием сходимости.***

Теперь легко понять, почему последовательность $x_n = n$, рассмотренная в п. 24, расходится. Дело в том, что эта последовательность не является ограниченной.

П р и м е р 1. Последовательность $(x_n) = \left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots\right)$ ограничена.

В самом деле, все члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.

П р и м е р 2. Последовательность $x_n = \frac{3n}{n+2}$ ограничена.

В самом деле, во-первых, $x_n > 0$. Во-вторых,

$$x_n = \frac{3n}{n+2} = 3\cdot\frac{n}{n+2} < 3.$$

Следовательно, $0 < x_n < 3$ для всех n.

П р и м е р 3. Последовательность $y_n = \frac{n+1}{3}$ не является ограниченной.

В самом деле, какое бы мы большое число M ни выбрали, существует натуральное $N > 3M$. При $n > N$ имеем $y_n > M$.

Возникает вопрос, не является ли ограниченность последовательности достаточным условием сходимости. Оказывается, что ответ на этот вопрос отрицателен. В самом деле, последовательность

$$(u_n) = (-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots)$$

ограничена, так как $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. Но эта последовательность, как это мы видели в п. 23, расходится.

В п. 32 мы увидим, что достаточным условием сходимости бесконечной последовательности являются ее ограниченность и монотонность.

Упражнения

173. Существует ли числовой промежуток $[a; b]$, где a и b — некоторые числа, которому принадлежат все члены последовательности:

а) $a_n = \frac{2n+1}{n}$; б) $b_n = (-2)^n$?

174. Докажите, что последовательность (u_n) является ограниченной, если:

а) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; б) $u_n = \frac{2n+7}{n}$.

175. Ограничена ли последовательность (y_n), если:
а) $y_n = 2n - 1$; в) $y_n = n^2$;
б) $y_n = \frac{1}{2n-1}$; г) $y_n = (-1)^n \cdot n$?

27. Теоремы о пределах

Сформулируем три теоремы, облегчающие вычисление пределов. Докажем одну из них.

Теорема 1. ***Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то***

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

При доказательстве этой теоремы используют определение предела и известное неравенство

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_1 такой, что для всех $n > n_1$ выполнено неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1)$$

и найдется номер n_2 такой, что для всех $n > n_2$ выполнено неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Наибольшее из чисел n_1 и n_2 обозначим через N. Тогда для любого $n > N$ выполнено как неравенство (1), так и неравенство (2), и потому для этих n

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ было взято произвольным, то этим доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. ***Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то***

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n).$$

Теорема 3. ***Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и предел последовательности (y_n) отличен от нуля, то***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Отметим еще следующее часто применяемое при вычислениях правило.

Следствие теоремы 2. ***Постоянный множитель можно выносить за знак предела:***

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n,\ c \in R.$$

В самом деле, по теореме 2

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Упражнения

176. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$, если:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 5$.

177. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0{,}4$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0{,}2$.
Найдите:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} 5x_n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n y_n + 1)$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n + y_n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7x_n}{y_n} + 3\right)$.

178*. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что для любого $m \in N$ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n^m = a^m.$$

28*. Бесконечно малые последовательности

Доказательства многих теорем о пределах и, в частности, теорем 2 и 3 предыдущего пункта существенно облегчаются, если ввести понятие бесконечно малой последовательности.

Определение. *Последовательность называется бесконечно малой последовательностью или просто бесконечно малой, если ее предел равен нулю.*

Иными словами, последовательность (x_n) называется бесконечно малой, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$

$$|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Пример 1. Последовательность $\alpha_n = \frac{1}{n}$ является бесконечно малой, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пример 2. Так как $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$, то при этом условии последовательность $(q, q^2, q^3, \ldots)$ бесконечно малая.

Теорема 1. ***Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.***

Доказательство. Пусть (α_n) и (β_n) — две бесконечно малые последовательности. Тогда по теореме 1 предыдущего пункта

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0 + 0 = 0.$$

А это означает, что последовательность $(\alpha_n + \beta_n)$ является бесконечно малой.

Методом математической индукции можно доказать, что сумма любого конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой.

Теорема 2. ***Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой.***

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) ограничена. Тогда существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ $|x_n| \leqslant M$. Если (α_n) — бесконечно малая последовательность, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ при всех $n > N$. Но тогда при этих n

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

А это и означает, что последовательность $(\alpha_n x_n)$ является бесконечно малой.

Следствие. ***Произведение двух бесконечно малых является бесконечно малой.***

В самом деле, так как бесконечно малая последовательность ограничена (всякая сходящаяся последовательность ограничена; см. п. 26), то сформулированное утверждение следует из теоремы 2. Методом математической индукции можно показать, что произведение любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Теорема 3. ***Для того чтобы выполнялось равенство***

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$$

Необходимость. Если $\lim_{n\to\infty} x = a$, то

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} a = a - a = 0.$$

Достаточность. Если $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(a + \alpha_n) = \lim_{n\to\infty} a + \lim_{n\to\infty}\alpha_n = a + 0 = a.$$

Приведем теперь доказательство теоремы о пределе произведения (теоремы 2 предыдущего пункта).

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то по первой части теоремы 3 для всех $n > N$

$$x_n = a + \alpha_n \text{ и } \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0,$$
$$y_n = b + \beta_n \text{ и } \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Последовательности $(a\beta_n)$, $(b\alpha_n)$, $(\alpha_n\beta_n)$ являются бесконечно малыми, поэтому бесконечно малой является также и их сумма, и, следовательно, на основании второй части теоремы 3

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n).$$

Аналогично доказывается теорема о пределе частного.

29. Примеры вычисления пределов

Пример 1. Пусть требуется найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1}.$$

Так как числитель и знаменатель представляют собой неограниченные последовательности и, следовательно, пределов не имеют, то сразу применять теорему о пределе частного нельзя. Разделим числитель и знаменатель на n (при этом значение дроби не изменится). Приведем подробную запись вычисления предела:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}5 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{5+0}{3-0} = \frac{5}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{n\to\infty} 4\cdot\frac{n-2}{n} = 4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n} = 4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = 4.$$

Пример 3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-5}{7n^2-n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{7-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{3}{7}.$$

Пример 4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0-0}=0.$$

Упражнения

179. С помощью теорем о пределах докажите, что:

а) предел последовательности $x_n=\frac{1,5n+1}{n}$ равен 1,5;

б) предел последовательности $y_n=\frac{3-4n^2+n}{5n^2+2n+6}$ равен $-0{,}8$.

180. С помощью теорем о пределах найдите предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{3-2n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-9}{3n^2+n-1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-n+2n^2}{2+n-4n^2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+5)}{n^2+1}$.

181. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2n^2+3}{3n^2-1}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{5n-1}\cdot\frac{2n^2+1}{n^2+2n-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+5n-1}{3n^3-2n^2}+\frac{3+5n}{3n-1}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{3n+2}\cdot\frac{2n^2}{n^2+n-1}\right)$.

182. Отрезок AB, длина которого равна a, разделен на n конгруэнтных частей. На каждой из этих частей построен равнобедренный треугольник с углом при основании, равным 45°. Найдите предел периметров P_n получающихся фигур (рис. 14) при $n\to\infty$.

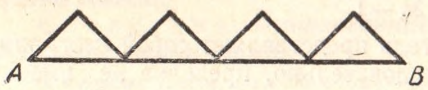

Рис. 14

30*. Сравнение роста арифметической и геометрической прогрессий

При помощи неравенства Бернулли можно решить одну очень интересную задачу. Сравним рост членов положительных арифметической и геометрической прогрессий. Пусть первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии, а также первый член геометрической прогрессии b_1 — положительные числа, а ее знаменатель q больше1, т. е. $a_1\geq 0$, $d\geq 0$, $b_1\geq 0$, $q\geq 1$.

Для того чтобы сравнить скорости роста этих прогрессий, рассмотрим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_1+dn}{b_1q^n}$$

и докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=0.$$

Поскольку $q>1$, то $\sqrt{q}>1$, и потому,

$$\sqrt{q}=1+\alpha,\ \text{где}\ \alpha>0.$$

В силу неравенства Бернулли

$$(\sqrt{q})^n=(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha>n\alpha.$$

Следовательно,

$$0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_1+dn}{b_1\cdot q^n}=\frac{a_1+dn}{b_1(\sqrt{q})^{2n}}<\frac{a_1+dn}{b_1(n\alpha)^2}.$$

Поскольку правая часть этого неравенства имеет пределом нуль, то для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое N, что для всех $n>N$

$$\frac{a_1+dn}{b_1(n\alpha)^2}<\varepsilon.$$

Поэтому для всех $n>N$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-0\right|=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}<\frac{a_1+dn}{b_1(n\alpha)^2}<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

В виде примера рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n=(1{,}00001)^n$. Сначала она возрастает очень медленно, при вычислениях с точностью до пяти знаков после запятой: $b_2=1{,}00002$; $b_{10}=1{,}00010$; $b_{100}=1{,}00100$; $b_{1000}=1{,}01005$.

Тем не менее b_n при достаточно большом n делается больше n-го члена любой арифметической прогрессии, например больше 1000 n.

Для наглядного представления о сравнительном росте членов арифметической и геометрической прогрессий (рис. 15) на координатной плоскости изображено несколько точек графиков арифметической прогрессии с общим членом $a_n=1+2(n-1)$ и геометрической прогрессии с общим членом $b_n=2^{n-1}$. На рисунке для лучшей обозримости точки арифметической прогрессии изображены на графике линейной функции $y=-1+2x$, целочисленными значениями которой являются точки прогрессии $a_n=1+2(n-1)$, а точки геометрической прогрессии — на графике показательной функции $y=2^{x-1}$, целочисленными значениями которой являются $b_n=2^{n-1}$. Видно, что значения первых

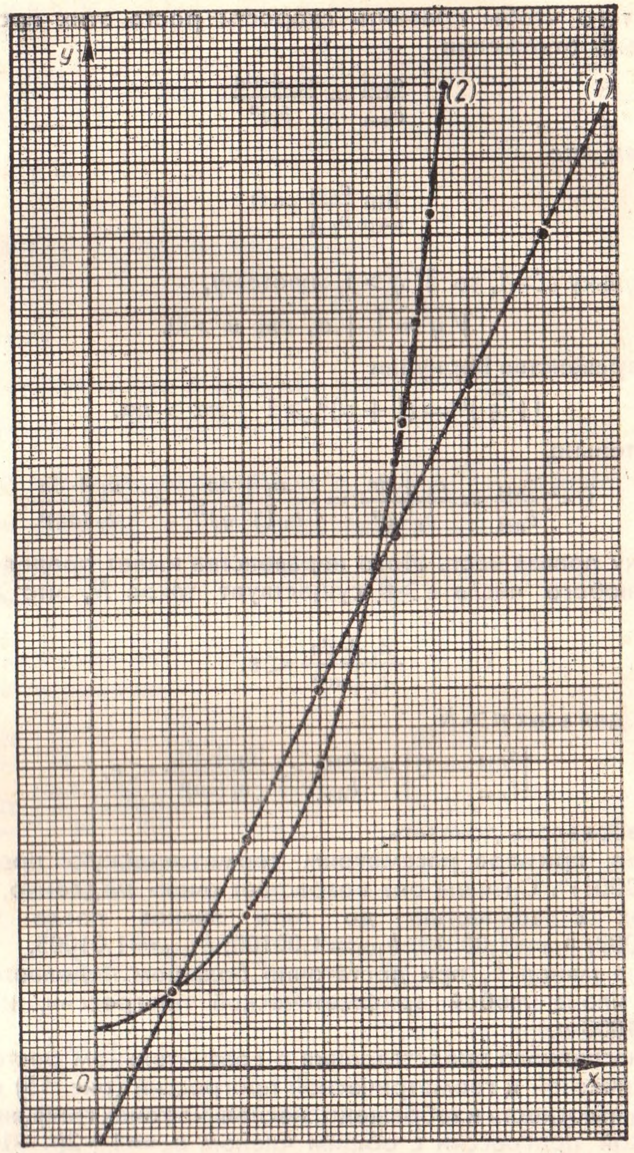

Рис. 15

членов обеих прогрессий совпадают, а второй и третий члены арифметической прогрессии больше второго и третьего членов геометрической прогрессии; все последующие члены геометрической прогрессии больше соответствующих членов арифметической прогрессии.

Упражнения

183*. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p}{q^n}=0$ при $q>1$ и $p>0$.

Указание. Представьте $q^{\frac{1}{1+p}}$ в виде $1+\alpha$, где $\alpha>0$, и используйте неравенство Бернулли.

31. Монотонные последовательности

В VIII классе уже были введены понятия убывающей и возрастающей последовательностей. Напомним их определения.

Определение 1. *Последовательность (x_n) называется* возрастающей, *если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство*

$$x_{n+1}>x_n.$$

Пример 1.

$$(x_n)=\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \dots;\ \frac{n-1}{n};\ \dots\right).$$

Так как $x_{n+1}-x_n=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}>0$, то $x_{n+1}>x_n$ и данная последовательность является возрастающей.

Определение 2. *Последовательность (x_n) называется* убывающей, *если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство*

$$x_{n+1}<x_n.$$

Пример 2. $(y_n)=\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \dots;\ \frac{1}{n};\ \dots\right)$.

Так как $y_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=y_n$, то данная последовательность является убывающей.

В теории пределов полезны также понятия «неубывающих» и «невозрастающих» последовательностей.

Пример 3. $(z_n)=\left(1;\ 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{5};\ \dots\right)$.

В последовательности (z_n) числа вида $\frac{1}{2n-1}$ подряд повторяются дважды.

У этой последовательности каждый член, начиная со второго, меньше или равен предыдущему: $z_{n+1}\leqslant z_n$. Такие последовательности называются *невозрастающими*. Заметим, что убывающие последовательности есть частный случай невозрастающих последовательностей.

Определение 3. *Последовательность (x_n) называется **невозрастающей**, если каждый ее член, начиная со второго, не больше предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство*

$$x_{n+1} \leqslant x_n.$$

Определение 4. *Последовательность (x_n) называется **неубывающей**, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство*

$$x_{n+1} \geqslant x_n.$$

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными* последовательностями (в частности, возрастающие и убывающие последовательности монотонны).

Не всякая последовательность является монотонной. В самом деле, последовательность

$$(x_n) = \left(-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \dots;\ \frac{(-1)^n}{n};\ \dots\right)$$

не является монотонной. С другой стороны, мы уже знаем, что эта последовательность сходится (см. п. 23) и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Следовательно, условие монотонности не является необходимым для сходимости последовательности.

Итак, подведем некоторые итоги: ограниченность последовательности является необходимым условием сходимости, монотонность не является необходимым условием. Совместное же выполнение обоих условий, как мы увидим в следующем пункте, уже обеспечивает сходимость последовательности.

Замечание. Из определения возрастающей последовательности следует, что для установления возрастания последовательности с положительными членами достаточно установить неравенство

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1;\quad n \in N.$$

Аналогичные замечания можно сделать относительно других видов монотонных последовательностей с положительными членами.

Пример. Пусть $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, тогда $x_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$.

Поэтому

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1} : \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1.$$

Следовательно, данная последовательность является убывающей.

Упражнения

184. Является ли убывающей или возрастающей последовательность (b_n), если:

а) $b_n = 2n^2$; в) $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

б) $b_n = 7^{-n} - 2$; г) $b_n = (-1)^n \cdot n$?

185. Является ли последовательность (a_n) возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, если при любом натуральном n верно неравенство:

а) $a_{n+1} - a_n > 0$; в) $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$;

б) $a_{n+1} - a_n < 0$; г) $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$?

186. Докажите, что последовательность (y_n) является монотонной, если:

а) $y_n = \dfrac{2-9n}{4}$; б) $y_n = \dfrac{3n+7}{2n+5}$.

187. Докажите, что последовательность (x_n) не является монотонной, если:

а) $x_n = n^2 - 12n$; б) $x_n = 4n - n^2$.

188. Монотонная ли: а) арифметическая прогрессия; б) геометрическая прогрессия? Приведите примеры.

189. Является ли последовательность (c_n), все члены которой — положительные числа, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, если при любом натуральном n верно неравенство:

а) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} < 1$; б) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \geqslant 1$; в) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant 1$; г) $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} > 1$?

190. Пусть p_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса r. Докажите, что последовательность

$$p_3,\ p_6,\ p_{12},\ p_{24},\ \dots,\ p_{3\cdot 2^{n-1}},\ \dots$$

является возрастающей.

191. Пусть q_n — периметр правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r. Докажите, что последовательность

$$q_3,\ q_6,\ q_{12},\ \dots,\ q_{3\cdot 2^{n-1}},\ \dots$$

является убывающей.

32. Существование предела монотонной и ограниченной последовательности

Теорема Вейерштрасса. ***Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.***

Доказательство этой теоремы мы не приводим. Отметим лишь, что в множестве Q рациональных чисел теорема Вейерштрасса не имеет места.

В самом деле, десятичные приближения по недостатку x_n к числу x рациональны и образуют монотонную последовательность. Эта последовательность сходится к числу x. Если число иррационально, то в силу теоремы о единственности предела последовательность (x_n) не может иметь рационального предела. Например, члены последовательности

$$x_1 = 0{,}1;$$
$$x_2 = 0{,}1001;$$
$$x_3 = 0{,}100100001;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = 10^{-1} + 10^{-2^2} + 10^{-3^2} + \dots + 10^{-n^2};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

являются десятичными приближениями по недостатку числа α, у которого единицы стоят на местах с номерами, равными квадратам натуральных чисел, нули — на остальных местах. И поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Число α является *иррациональным*, так как оно является непериодической бесконечной десятичной дробью. Следовательно, если бы в нашем распоряжении имелись лишь рациональные числа, то мы должны были бы сказать, что последовательность (x_n) не имеет предела, хотя она и удовлетворяет всем условиям теоремы Вейерштрасса:

$$0 < x_n < 0{,}2 \text{ и } x_{n+1} > x_n.$$

В теореме Вейерштрасса сформулированы достаточные условия существования предела последовательности. Но способ нахождения этого предела теоремой не указывается. Тем не менее часто бывает, что одна лишь информация о существовании предела позволяет его вычислить. С этой точки зрения весьма интересны следующие примеры. В них мы пользуемся тем, что для любой сходящейся последовательности (x_n)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1},$$

поскольку (x_n) и (x_{n-1}) это по существу одна и та же последовательность (они отличаются лишь первым членом и порядком нумерации членов).

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

Проведем доказательство для положительных q. Последовательность (q^n) ограничена, так как $0 < q^n < 1$, и монотонно убывает, поскольку $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$. Эта последовательность удовлетворяет обоим условиям теоремы Вейерштрасса. Поэтому она имеет предел, обозначим его через a:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = a.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} q \cdot q^{n-1} = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = q \cdot a.$$

Из $a = q \cdot a$ вытекает $a(1 - q) = 0$. Так как $1 - q \neq 0$, получаем

$$a = 0.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Случай $q < 0$ сводится к случаю $q > 0$ (объясните как). Вы видите, что теорема Вейерштрасса позволила нам обойтись без выкладок с неравенствами из п. 23.

Пример 2*. Дадим обоснование одного старого способа приближенного извлечения квадратных корней. Пусть требуется найти квадратный корень из положительного числа a. В виде первого приближения возьмем положительное число x_1, квадрат которого больше a. Тогда x_1 будет больше $\sqrt{a}$, а число $\frac{a}{x_1}$ — меньше $\sqrt{a}$: $\frac{a}{x_1} < \sqrt{a} < x_1$.

В виде следующего приближения возьмем

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_1} + x_1\right),$$

а затем определим последовательность (x_n) рекуррентно:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right). \qquad (1)$$

1) Докажите сами, что всегда

$$\frac{a}{x_n} < \sqrt{a} < x_n.$$

2) Докажите сами, что последовательность (x_n) убывающая.

3) Так как при всех n $(n \geqslant 2)$ $a < x_n < x_1$, то последовательность (x_n) ограничена. По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Чтобы его найти, «перейдем к пределу» в равенстве (1), заметив, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Обозначая этот предел через c, имеем:

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + c\right);$$
$$c^2 - a = 0;$$
$$c = \sqrt{a}.$$

4) Отметим, что последовательность (x_n) сходится к $\sqrt{a}$ очень быстро.

Так, при $a = 2$ и $x_1 = 2$ имеем:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2} + 2\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5;$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3/2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12} \approx 1{,}416;$$
$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{17/12} + \frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408} \approx 1{,}414216.$$

Как видите, этот способ прост и очень быстро дает большую точность: $x_2 \approx \sqrt{2}$ с точностью до 0,1; x_3 имеет два верных десятичных знака; x_4 имеет уже пять верных десятичных знаков.

Если провести рассуждения в общем виде, то для разности

$$\Delta_n = x_n - \sqrt{a}$$

можно вывести рекуррентную формулу

$$\Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n^2}{2(\sqrt{a} + \Delta_n)},$$

из которой вытекает, что

$$\Delta_{n+1} < \frac{\Delta_n^2}{2\sqrt{a}},$$

т. е. число верных десятичных знаков с каждым шагом приблизительно удваивается.

Упражнения

192. Истинно ли высказывание:
а) если последовательность не ограничена, то она не имеет предела;
б) если последовательность имеет предел, то она ограничена;
в) если последовательность не монотонна, то она не имеет предела;
г) если последовательность имеет предел, то она монотонна.

193. Найдите пределы:

а) $x_n = \frac{n}{2^n}$; б) $x_n = \frac{2^n}{n!}$.

Указание. Проверьте условия применимости теоремы Вейерштрасса и сравните $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}$.

33. Число π и длина окружности

Еще в V классе вы узнали, что длина окружности единичного диаметра выражается числом

$$\pi = 3{,}14159...$$

Длина окружности диаметра d выражается формулой

$$C = \pi d. \qquad (1)$$

В учебнике геометрии для VIII класса сказано, что длина окружности должна быть больше периметра любого правильного вписанного в окружность многоугольника и меньше периметра любого описанного около нее правильного многоугольника (рис. 16, 17).

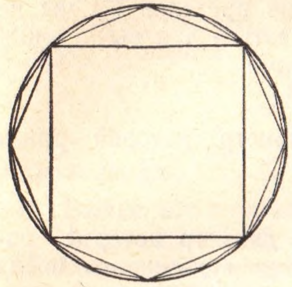

Рис. 16

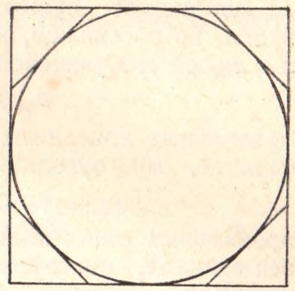

Рис. 17

Это предположение позволяет дать хорошие приближенные оценки числа π. Еще Архимед установил, что периметр P_{96} вписанного в окружность диаметра d правильного девяностошестиугольника удовлетворяет неравенству

$$P_{96} > 3\frac{10}{17}d,$$

а периметр Q_{96} описанного правильного девяностошестиугольника — неравенству

$$Q_{96} < 3\frac{1}{7}d.$$

Отсюда вытекает (если принять высказанное выше допущение), что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Из соображений подобия вытекает, что

$$P_n = p_n d, \; Q_n = q_n d, \qquad (2)$$

где p_n и q_n — периметры соответственно вписанных и описанных правильных многоугольников для окружности диаметра $d = 1$.

Оказывается, что последовательности

$$p_3, p_4, p_5, \dots, p_n, \dots,$$
$$q_3, q_4, q_5, \dots, q_n, \dots$$

имеют общий предел. Этот предел и есть число π:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) вытекает равенство (1).

Дадим теперь определение длины окружности.

Определение. *Длиной окружности называется предел последовательности периметров правильных вписанных многоугольников.*

Доказывать существование и совпадение пределов (3) мы не будем, но расскажем, как можно воспользоваться для вычисления π с любой требующейся точностью периметрами

$$p_6, p_{12}, p_{24}, \dots, p_{3\cdot 2^k}, \dots$$

правильных вписанных в окружность, диаметр которой равен единице, многоугольников и периметрами

$$q_6, q_{12}, q_{24}, \dots, q_{3\cdot 2^k}, \dots$$

правильных описанных около окружности, диаметр которой равен единице, многоугольников, получающихся «удвоением» числа сторон.

Очевидно, что

$$p_n = na_n, \; q_n = nb_n, \tag{4}$$

где a_n — сторона правильного вписанного в окружность диаметра единицы n-угольника и b_n — стороны правильного описанного около этой же окружности n-угольника. Для вычисления a_{2n} по a_n существует формула

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - a_n^2}}. \tag{5}$$

Для вычисления b_n по a_n можно воспользоваться формулой

$$b_n = a_n : \sqrt{1 - a_n^2}. \tag{6}$$

Формулы (5), (6) и (4) позволяют последовательно вычислять $a_{3\cdot 2^k}$ и $b_{3\cdot 2^k}$, $p_{3\cdot 2^k}$ и $q_{3\cdot 2^k}$ для любого натурального k, отправляясь от $a_6 = 0{,}5$.

Число π есть общий предел:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} p_{3\cdot 2^k} = \lim_{n \to \infty} q_{3\cdot 2^k} \tag{7}$$

последовательностей $(p_{3\cdot 2^k})$ и $(q_{3\cdot 2^k})$. Можно показать, что первая из этих последовательностей монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая — монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому существование их пределов есть следствие теоремы Вейерштрасса. Совпадение их пределов вытекает из формулы

$$q_n = p_n\sqrt{1 - a_n^2}$$

и того обстоятельства, что a_n при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Приведем в заключение таблицу, которая иллюстрирует приближения $p_{3\cdot 2^k}$ и $q_{3\cdot 2^k}$ к числу π:

n	p_n	q_n
6	3,00000	3,46414
12	3,10595	3,21554
24	3,13301	3,16005
48	3,13475	3,14665
96	3,14134	3,14284

Для 3072-угольников, вписанных и описанных около окружности, диаметр которой равен 1, получены уже совсем близкие друг к другу значения

$$p_{3072} = 3{,}141592652\dots,$$
$$q_{3072} = 3{,}141592654\dots.$$

Упражнения

194. Вычислите с точностью до 0,001 длину окружности, если: а) $r = 2{,}1000$; б) $r = 1{,}2300$; в) $r = 12{,}7000$; г) $r = 3{,}2785$.

195. Вычислите периметр полукруга с точностью до 0,001, если: а) $r = 1{,}3000$; б) $r = 3{,}7000$; в) $r = 15{,}2000$; г) $r = 5{,}2329$.

196. Для окружности радиуса r вычислите длину дуги с центральным углом, равным:
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 1°.

197. Для окружности радиуса r выведите формулу для длины ее дуги с центральным углом в α градусов.

198. Фигура состоит из объединения двух одинаковых кругов радиуса r, центры которых находятся на расстоянии $r\sqrt{3}$. Найдите периметр этой фигуры.

Дополнительные упражнения к главе III

199. Истинно ли высказывание:

а) $51 \in N$; г) $\frac{1}{3} \notin Q$; е) $-8 \notin N$;

б) $-\sqrt{3} \in Q$; ж) $\sqrt{17} \in Q$;

в) $0{,}737 \notin Z$; д) $0 \in R$; з) $\lg 36 \in Q$?

200. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен: а) 7; б) 11.

201. Докажите, что не существует рационального числа, равного: а) $\lg 5$; б) $\lg 43$.

202. Докажите, что числа $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{2}$ не рациональны.

203. Известно, что $\beta = 10{,}6071246\dots$. Найдите десятичные приближения числа β по недостатку и по избытку с точностью до 0,1; 0,001; 0,00001.

204. Известно, что:

а) $6{,}8 \leqslant \sqrt{47} < 6{,}9$. Найдите десятичные приближения $\sqrt{47}$ по недостатку и по избытку с точностью до 0,01.

б) $3{,}6 \leqslant \sqrt{12{,}96} < 3{,}7$. Найдите десятичные приближения $\sqrt{12{,}96}$ по недостатку и по избытку с точностью до 0,01.

205. Какие из данных чисел представляются в виде бесконечных периодических десятичных дробей и какие — в виде бесконечных непериодических десятичных дробей:

$$\frac{2}{7}, \sqrt{2}, \frac{3}{5}, \sqrt{5}, \sqrt{36}, -\frac{1}{13}, -\sqrt{3}?$$

206. Каким является число α, рациональным или иррациональным, если начиная с некоторого номера все его десятичные приближения по недостатку представляют собой равные дроби?

207. Известно, что $\alpha = 3{,}6711845\ldots$. Приведите пример действительного числа, меньшего α; большего α.

208. При каких натуральных значениях n верно неравенство $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, если:
а) $\varepsilon = 0{,}0003685\ldots$; б) $\varepsilon = 0{,}001645\ldots$?

209. Докажите, что если r и s — рациональные числа и $r < s$, то число $\frac{r+s}{2}$ лежит между ними.

210*. Докажите, что если α и β — два действительных числа и $\alpha < \beta$, то существует хотя бы одно рациональное число r, лежащее между ними.

211. Пусть α и β — иррациональные числа, а $\alpha + \beta$ — рациональное число. Докажите, что числа $\alpha - \beta$, $\alpha + 2\beta$ иррациональны.

212. Докажите, что если α — положительное иррациональное число, то $\sqrt{\alpha}$ — иррациональное число.

Найдите три первых десятичных знака бесконечной десятичной дроби, выражающей число:

213. $3 + \sqrt{2}$. **214.** $\frac{3}{7} + \sqrt{3}$. **215.** $0,(6) - \sqrt{6}$.

216. $5\sqrt{2}$. **217.** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. **218.** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$.

219. Что больше: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ или $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

220. Докажите, что число $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ иррациональное.

221. Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное.

222. Докажите, что разность рационального и иррационального чисел есть число иррациональное.

223. Приведите пример двух иррациональных чисел:
а) сумма которых есть число иррациональное;
б) сумма которых есть число рациональное.

224. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что число $\frac{1}{\alpha}$ также иррациональное.

225. Найдите координату точки C координатной прямой, для которой:
а) $|AC| = |BC|$, если $A = M(-10{,}2)$ и $B = M(0{,}4)$;
б) $|BC| = 2|AC|$, если $A = M(0)$ и $B = M(12)$.

226. Пользуясь теоремой Пифагора, постройте отрезок, длина которого равна: а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{14}$.

227. Решите уравнение или неравенство:
а) $|x - 2| = 0{,}3$; г) $|10 - x| < 7$;
б) $|x + 3| = 0{,}1$; д) $|x + 1| > 1$;
в) $|x - 2{,}5| \leqslant 0{,}5$; е) $|8 + x| \geqslant 0{,}7$.

228. Решите уравнение:
а) $|x + 4| = |x - 4|$; б) $|x + 2{,}5| = |x - 3{,}3|$.

229. Решите неравенство:
а) $|x| \geqslant |x - 2|$; б) $|x - 5| < |x - 1|$.

230. Изобразите множество точек координатной плоскости:
а) $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$; д) $\{(x; y) \mid |x| = |y|\}$;
б) $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$; е) $\{(x; y) \mid |x| + x = |y| + y\}$;
в) $\{(x; y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$; ж) $\left\{(x; y) \mid \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}\right\}$;
г) $\{(x; y) \mid (x^2 - 4)^2 + y^2 = 0\}$; з) $\{(x; y) \mid |x| + |y| = x + y\}$.

231*. Изобразите в координатной плоскости множество точек:
а) $\{(x; y) \mid (x - 4)(y + 1) = 0\}$;
б) $\{(x; y) \mid x^2 - y^2 \geqslant 0\}$;
в) $\left\{(x; y) \mid \frac{x-4}{y+1} = 0\right\}$;
г) $\{(x; y) \mid y^2 \leqslant x^2$ и $|x| \leqslant 2\}$;
д) $\{(x; y) \mid (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$;
е) $\{(x; y) \mid (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) \leqslant 0\}$.

232. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{1}{2^n + 1}$. Найдите x_3, x_5, x_{n+1}, x_{2n+1}, $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

233. Подберите формулу n-го члена конечной последовательности:
а) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \frac{1}{25}$; д) $\frac{1}{2}; \frac{2}{2^2}; \frac{3}{2^3}; \frac{4}{2^4}; \frac{5}{2^5}$;
б) $\frac{1}{3}; \frac{2}{9}; \frac{3}{27}; \frac{4}{81}; \frac{5}{243}$; е) $\frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{1}{28}; \frac{1}{82}$;
в) $\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{9}; \frac{1}{12}; \frac{1}{15}$; ж) $1; \frac{2}{101}; \frac{4}{201}; \frac{8}{301}$;
г) $\frac{1}{4}; \frac{1}{7}; \frac{1}{10}; \frac{1}{13}; \frac{1}{16}$; з) $\frac{1}{3}; \left(\frac{2}{5}\right)^2; \left(\frac{3}{7}\right)^3; \left(\frac{4}{9}\right)^4$.

234. Изобразите геометрически (двумя способами) последовательность (u_n). Существует ли такое число, к которому стремится последовательность (u_n):
а) $u_n = \frac{2n+1}{2n}$; в) $u_n = \frac{2n-3}{3n}$;
б) $u_n = \frac{4n-1}{3n}$; г) $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$?

235. Укажите номера членов последовательности (y_n), где $y_n = \frac{5n-1}{n}$, которые удалены от точки 5: а) менее чем на $\frac{1}{3}$; б) менее чем на 0,001.

236. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{2n-3}{n}$. При каких натуральных значениях n выполняется условие:
а) $|x_n - 2| < 0{,}1$; б) $|x_n - 2| < 0{,}01$?

237. Последовательность (z_n) задана формулой $z_n = \frac{3n+5}{2n}$. При каких натуральных значениях n выполняется условие:
а) $|z_n - 1{,}5| < 0{,}1$; б) $|z_n - 1{,}5| < 0{,}01$?

238. Докажите, что верно равенство:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

239. Имеет ли предел последовательность $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$? Чему он равен? (Приведите доказательство.)

240. Докажите, что:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4+16} = 0$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

241. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a < q$. Докажите, что почти все члены последовательности (x_n) меньше q (за исключением, быть может, конечного числа членов).

242. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a > p$. Докажите, что почти все члены последовательности (x_n) (за исключением, быть может, лишь конечного числа членов) больше p.

243. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.
Указание. Воспользуйтесь неравенством
$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|.$$

244. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p$. Существует ли предел последовательности
$$a_1;\ b_1;\ a_2;\ b_2;\ \dots;\ a_n;\ b_n;\ \dots\ ?$$
Чему он равен?

245. Найдите значение выражения:
а) $\frac{0,(5)}{0,(3)}$; б) $\frac{0{,}1(2) + 0{,}3(4)}{0{,}4(5) - 0{,}2(3)}$.

246. Найдите сумму ряда:
а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$;
б) $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}} + \dots$.

247*. Укажите какие-нибудь значения x, при которых верно равенство:
а) $\frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \dots)$;

б) $\frac{1}{x} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^{n-1} + \dots$.

248*. Докажите методом математической индукции, что если последовательности $(x_n), (y_n), \dots, (f_n)$ сходятся, то:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n + \dots + f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n + \dots + \lim\limits_{n\to\infty} f_n$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n \cdot \dots \cdot f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n \cdot \dots \cdot \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

249*. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$?

250*. Известно, что последовательности (x_n) и (y_n) расходятся. Могут ли сходиться последовательности $(x_n + y_n)$ и $(x_n y_n)$? Приведите примеры.

251*. Известно, что последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится. Могут ли сходиться последовательности $(x_n + y_n)$ и $(x_n y_n)$?

252. Найдите предел:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 3n^4 - 2n^2}{n + 2n^3 - 2n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(1-n)(2+n)}{2n^3 + n^2 - 1}$.

253. Вычислите
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right).$$

254. Катет a прямоугольного треугольника разделен на n конгруэнтных частей и на полученных отрезках построены вписанные прямоугольники (рис. 18). Найдите предел последовательности (S_n) площадей образованных ступенчатых фигур. Истолкуйте геометрически полученный результат.

255. Найдите «площадь» фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, отрезком $[0; 2]$ оси абсцисс и прямой $x = 2$ (рис. 19), как

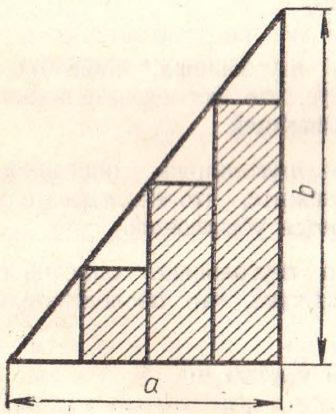

Рис. 18

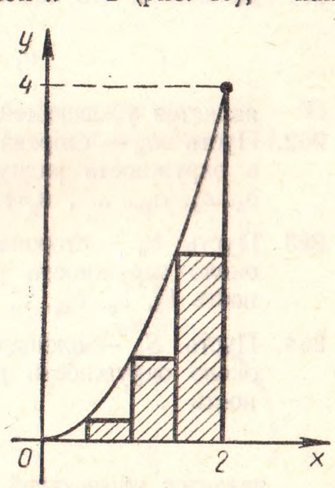

Рис. 19

предел площадей ступенчатых фигур, построенных так же, как и в предыдущем упражнении.

256. Найдите предел:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1+n)(2+3n)(3-4n)}{(1+2n)(3+2n)(4+n)}.$$

257. Является ли монотонной последовательность (x_n), если:

а) $x_n = \frac{2n-3}{n}$; б)* $x_n = \frac{2^n}{n!}$?

258*. Докажите, что последовательность (a_n) является возрастающей, если:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

б) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

259. Докажите, что:

а) последовательность $x_n = \frac{3n-1}{5n+2}$ является возрастающей;

б) последовательность $y_n = \frac{6-n}{5a+2}$ является убывающей.

260*. При каких коэффициентах a и b последовательность $y_n = \frac{an+2}{bn+1}$ является возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей?

261*. Докажите, что последовательность (u_n):

$$u_1 = 3, \; u_{n+1} = \frac{2+u_n^2}{2u_n},$$

является убывающей.

262. Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса r. Докажите, что последовательность $a_4, a_8, a_{16}, \ldots, a_{2^{n+1}}$ является убывающей.

263. Пусть b_n — сторона правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r. Докажите, что последовательность $b_3, b_6, b_{12}, \ldots, b_{3 \cdot 2^{n-1}}$ является убывающей.

264. Пусть S_n — площадь правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r. Докажите, что последовательность

$$S_3, \; S_6, \; S_{12}, \; \ldots, \; S_{3 \cdot 2^{n-1}}, \; \ldots$$

является убывающей.

Глава IV ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНАЯ

§ 8. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОИЗВОДНОЙ И ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ

34. Числовые функции

Мы будем заниматься далее функциями, у которых область определения и множество значений состоят из действительных чисел. Область определения функции f будем обозначать $D(f)$, а множество ее значений — $E(f)$.

П р и м е р 1. Последовательность

$$(-1; 1; -1; 1; -1; \ldots)$$

есть функция f, определенная формулой

$$f(n) = (-1)^n$$

на множестве натуральных чисел. Ее область определения $D(f) = N$, а множество значений $E(f) = \{-1; 1\}$ состоит из двух чисел: -1 и 1.

П р и м е р 2. Формула

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

задает функцию f, область определения которой есть отрезок $[-1; 1]$ (рис. 20), а множество значений — отрезок $[0; 1]$.

Вообще, *числовая функция есть отображение некоторого подмножества D множества R на другое подмножество E множества R*. Множество D называют *областью определения*, а множество E — *множеством значений* функции.

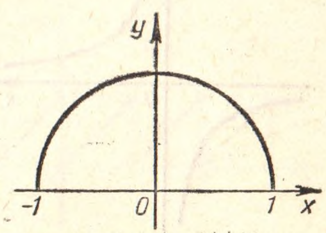

Рис. 20