предел площадей ступенчатых фигур, построенных так же, как и в предыдущем упражнении.

256. Найдите предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)(2+3n)(3-4n)}{(1+2n)(3+2n)(4+n)}.$$

257. Является ли монотонной последовательность (x_n), если:

а) $x_n = \frac{2n-3}{n}$; б)* $x_n = \frac{2^n}{n!}$?

258*. Докажите, что последовательность (a_n) является возрастающей, если:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$;

б) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

259. Докажите, что:

а) последовательность $x_n = \frac{3n-1}{5n+2}$ является возрастающей;

б) последовательность $y_n = \frac{6-n}{5a+2}$ является убывающей.

260*. При каких коэффициентах a и b последовательность $y_n = \frac{an+2}{bn+1}$ является возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей?

261*. Докажите, что последовательность (u_n):

$$u_1 = 3,\ u_{n+1} = \frac{2+u_n^2}{2u_n},$$

является убывающей.

262. Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса r. Докажите, что последовательность $a_4, a_8, a_{16}, \dots, a_{2^{n+1}}$ является убывающей.

263. Пусть b_n — сторона правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r. Докажите, что последовательность $b_3, b_6, b_{12}, \dots, b_{3\cdot 2^{n-1}}$ является убывающей.

264. Пусть S_n — площадь правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r. Докажите, что последовательность

$$S_3,\ S_6,\ S_{12},\ \dots,\ S_{3\cdot 2^{n-1}},\ \dots$$

является убывающей.

Глава IV ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНАЯ

§ 8. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОИЗВОДНОЙ И ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ

34. Числовые функции

Мы будем заниматься далее функциями, у которых область определения и множество значений состоят из действительных чисел. Область определения функции f будем обозначать $D(f)$, а множество ее значений — $E(f)$.

П р и м е р 1. Последовательность

$$(-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \dots)$$

есть функция f, определенная формулой

$$f(n) = (-1)^n$$

на множестве натуральных чисел. Ее область определения $D(f) = \mathbf{N}$, а множество значений $E(f) = \{-1;\ 1\}$ состоит из двух чисел: -1 и 1.

П р и м е р 2. Формула

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

задает функцию f, область определения которой есть отрезок $[-1;\ 1]$ (рис. 20), а множество значений — отрезок $[0;\ 1]$.

Вообще, *числовая функция есть отображение некоторого подмножества D множества $\mathbf{R}$ на другое подмножество E множества $\mathbf{R}$*. Множество D называют *областью определения*, а множество E — *множеством значений* функции.

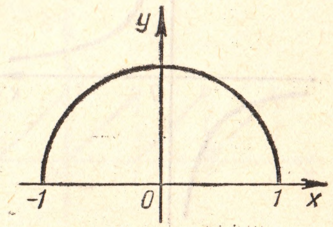

Рис. 20

П р и м е р 3. Отображение

$$x \to \frac{1}{x}$$

есть функция, для которой областью определения и множеством значений служит одно и то же множество — множество всех отличных от нуля действительных чисел (рис. 21).

Функция f полностью определяется заданием множества пар

$$(x;\ f(x)),$$

где x пробегает все множество $D(f)$, а $f(x)$ — соответствующие значения функции.

Множество этих пар можно записать еще таким образом:

$$\{(x;\ y) \mid y = f\ (x)\}.$$

Очевидно, это подмножество множества R^2, т. е. числовой плоскости. Изображение этого множества на координатной плоскости есть график функции (см. на рис. 20 и 21 графики функций из примеров 2 и 3).

Далеко не всякое множество точек координатной плоскости является графиком какой-либо функции. Например, множество, изображенное на рисунке 22, не есть график функции, так как оно содержит две точки с абсциссой a и разными ординатами b_1 и b_2. Если бы мы сочли это множество графиком функции, нам пришлось бы считать, что наша функция имеет при $x = a$ сразу два значения: $y = b_1$ и $y = b_2$, что противоречит определению понятия функции.

Еще в учебнике для VI класса было сказано, что функции — это частный случай *соответствий*. Чтобы задать *числовое соответствие*, для каждого x указываются все те y, которые соответствуют этому числу x (для некоторых x таких y может и не быть). Например, формула

$$x^2 + y^2 = 1$$

задает соответствие, в котором каждому x из интервала $]-1;\ 1[$ соответствуют два числа:

$$y_1 = \sqrt{1 - x^2} \text{ и } y_2 = -\sqrt{1 - x^2},$$

числу $x = 1$ и числу $x = -1$ соответствует одно-единственное число $y = 0$,

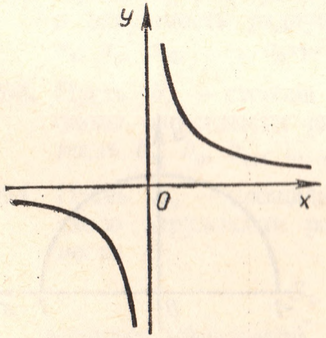

Рис. 21

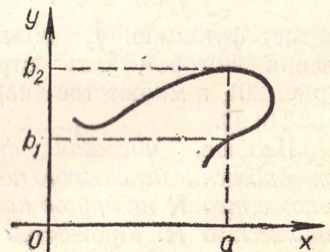

Рис. 22

а числам x, по модулю превышающим единицу, не соответствует ничего. На рисунке 23 дан график этого соответствия.

Произвольное подмножество множества R^2 задает числовое соответствие. В современной математике, стремясь уменьшить число основных математических понятий, говорят проще: *числовое соответствие есть множество пар чисел*, т. е. подмножество множества R^2 — числовой плоскости.

С этой точки зрения числовая функция, как частный случай соответствия, тоже есть множество пар чисел, но уже не произвольное. *Числовая функция есть такое множество f пар чисел $(x;\ y)$, что для любого числа x имеется в этом множестве не более одной пары $(x;\ y)$ с первым элементом x.*

Второе число в этой единственной паре и есть $f(x)$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x;\ y) \in f.$$

Например, функция

$$x \to \frac{1}{x}$$

есть множество числовых пар вида $\left(x;\ \frac{1}{x}\right)$.

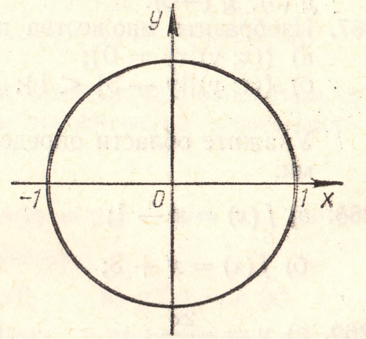

Рис. 23

П р и м е р 4. Отображение $x \to [x]$ ($[x]$ — целая часть числа x).

Вспомнив, что на промежутке $[n;\ n + 1[$, где n — целое число, $[x] = n$, построим график этой функции (рис. 24). График состоит из горизонтальных отрезков, из которых исключены их правые концы (отмеченные кружочками).

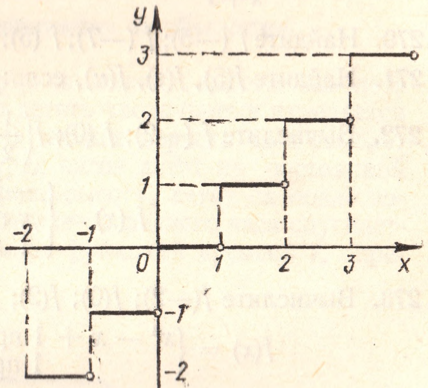

Рис. 24

П р и м е р 5. Отображение $x \to \{x\}$ ($\{x\}$ — дробная часть числа x).

Из определения дробной части числа x следует, что $f\ (x) = x - n$ для $x \in [n;\ n + 1[$.

Таким образом, на каждом промежутке $[n;\ n + 1[$ графиком рассматриваемой функции служит отрезок прямой, наклоненной к оси Ox под углом 45°, из которого исключен правый конец. Полный график этой функции состоит из бесконечного числа таких отрезков (рис. 25).

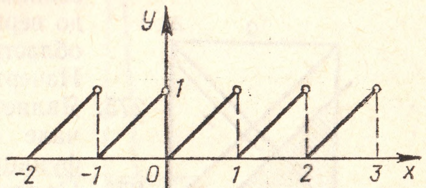

Рис. 25

Упражнения

265. $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Найдите $f(1)$, $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(-0{,}5)$.

266. Уравнение $3y = 5x - 2$ определяет функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$. Найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(a^2 + 1)$, $f(x - 1)$, $g(x)$, $g(5)$, $g(-3)$.

267. Изобразите множества и назовите полученные фигуры:
а) $\{(x;\, y) | xy = 0\}$;
б) $\{(x;\, y) | |y - 3| < 1\}$;
в) $\{(x;\, y) | |x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1\}$;
г) $\{(x;\, y) | |x - 2| < 1$ и $|y + 3| < 1\}$.

Укажите области определения функции f, заданных формулами:

268. а) $f(x) = x - 1$;
б) $f(x) = x + 3$;
в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;
г) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

269. а) $y = \frac{2x}{x^2 + 3}$;
б) $y = \frac{x}{x + 1}$;
в) $g(x) = \sqrt{10x - 5}$;
г) $f(x) = \sqrt{5 - 10x}$.

270. Найдите $f(-5)$; $f(-7)$; $f(5)$; $f(x)$; $f(t)$, если $f(u) = \sqrt{u^2 + 5u + 1}$.

271. Найдите $f(5)$, $f(z)$, $f(u)$, если: а) $f(x) = \sqrt{\frac{4 - x}{2 - x}}$; б) $f(x) = \lg\frac{x - 4}{x + 2}$.

272. Вычислите $f(-2)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(1)$; $f(4)$, если

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ x \text{ при } 0 < x < 1, \\ 1 \text{ при } 1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

273. Вычислите $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(5)$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 \text{ при } |x| \leqslant 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

274. В квадрате со стороной a проведена прямая, параллельная диагонали. Установите зависимость между площадью S отсекаемой фигуры и расстоянием x прямой до вершины квадрата (рис. 26). Найдите область определения функции $x \to S(x)$. Начертите ее график.

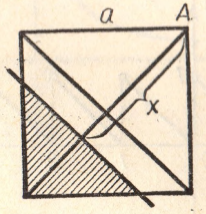

Рис. 26

275. Является ли окружность с центром в начале координат графиком какой-либо функции?

276. Приведите три примера функций, графики которых симметричны относительно оси ординат.

277. График функции $x \to f(x)$ симметричен относительно оси ординат. Запишите это свойство в виде равенства.

278. Приведите три примера функций, графики которых симметричны относительно начала координат.

279. График функции $x \to f(x)$ симметричен относительно начала координат. Запишите это свойство в виде равенства.

280. Постройте графики функций f, заданных формулами:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x^3$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f(x) = x^4$; д) $f(x) = 0$.

Какие из графиков этих функций симметричны относительно оси ординат, а какие симметричны относительно начала координат?

281*. Заданы три функции f, g, h:

$$f(x) = \lg x^2,\ g(x) = 2\lg x,\ h(x) = 2\lg |x|.$$

При каких значениях $x \neq 0$ равенства

а) $f(x) = g(x)$; б) $f(x) = h(x)$; в) $g(x) = h(x)$

становятся ложными высказываниями, а при каких — истинными?

35. Изменение функции, ее возрастание и убывание

На рисунке 27 изображен график изменения высоты самолета в течение полета, продолжающегося десять часов (время измеряется в часах, высота — в километрах). В течение первого часа самолет набирает высоту, затем в течение трех часов летит на постоянной высоте, в течение часа вновь набирает высоту, летит на новой постоянной высоте четыре часа, а в течение последнего часа спускается. Высота h является в этом примере функцией времени t, опре-

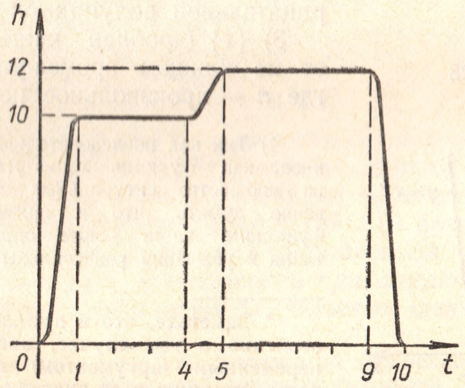

Рис. 27

деленной на промежутке [0; 10], обозначим эту функцию* через $h(t)$. На промежутке [0; 1] функция возрастает, на промежутке [1; 4] постоянна, на промежутке [4; 5] вновь возрастает, на промежутке [5; 9] постоянна, на последнем промежутке [9; 10] убывает до нуля.

Если рассмотреть промежуток [0; 9], то нельзя сказать, что функция

$$h = h(t)$$

на этом промежутке все время возрастает. Верно только, что она на этом промежутке нигде не убывает. Аналогично про поведение нашей функции на промежутке [5; 10] можно сказать, что она на этом промежутке нигде не возрастает.

Сформулируем соответствующие этим наглядным соображениям математические определения.

I. Функция f называется *возрастающей* на множестве E, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству E, из $x_1 < x_2$ вытекает: $f(x_1) < f(x_2)$.

II. Функция f называется *убывающей* на множестве E, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству E, из $x_1 < x_2$ вытекает:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

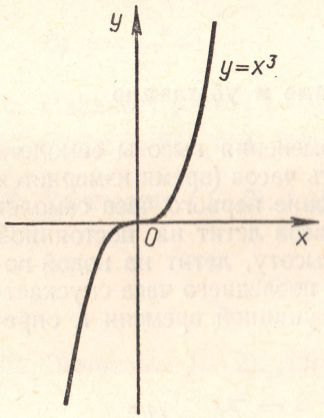

Рис. 28

П р и м е р ы. 1) Функции $x \to x$, $x \to x^3$ (рис. 28) и вообще $x \to x^n$ при любом натуральном нечетном n возрастают на всей числовой прямой.

2) Функции $x \to x^2$ и вообще $x \to x^n$ (рис. 29) при любом натуральном четном n возрастают на положительной полупрямой $[0; +\infty[$ и убывают на отрицательной полупрямой $]-\infty; 0]$.

3) $\{x\}$ (дробная часть x) возрастает на каждом промежутке $[n; n+1[$, где n — произвольное целое число.

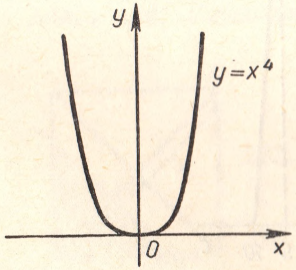

Рис. 29

4) Так как последовательность есть не что иное, как функция $x_n = f(n)$, определенная на множестве натуральных чисел, то естественно думать, что в применении к таким функциям наши новые определения возрастания и убывания равносильны данным в п.31.

* Заметьте, что в прикладных вопросах, особенно в том случае, когда независимым переменным (аргументом) является время, часто функцию и ее значение обозначают одной и той же буквой.

Это предположение верно. Рассмотрим подробнее случай возрастания. По новому определению последовательность (x_n) возрастает в том и только в том случае, если при любых натуральных m и n из $m < n$ вытекает:

$$x_m < x_n. \tag{1}$$

Ясно, что в этом случае, в частности при любом натуральном m,

$$x_m < x_{m+1}. \tag{2}$$

Если неравенства (2) верны при любом натуральном m, как этого требует определение возрастающей последовательности из п. 31, то из цепочки неравенств $x_m < x_{m+1} < \ldots < x_n$ получаем при любых m и n $(n > m)$ неравенство (1).

Упражнения

Определите промежутки возрастания и убывания функций f:

282. $f(x) = -3x + 2$.

283. $f(x) = |x - 2|$.

284. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

285. $f(x) = (x - 2)^2$.

286. $f(x) = -(x - 3)^2$.

287. $f(x) = -2x^2 + 6x - 7$.

288. $f(x) = \frac{1}{x}$.

289. $f(x) = -\frac{1}{x}$.

290. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

291. $f(x) = -x^{\frac{1}{2}}$.

292. $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$.

293. $f(x) = 0{,}5x^{\frac{1}{3}}$.

294. $f(x) = 2^x$.

295. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

296. $f(x) = |\lg x|$.

297. $f(x) = \lg|x|$.

36. Приращение функции

В формуле

$$y = f(x)$$

переменную x называют *независимой переменной* (или *аргументом* функции). Каждому ее значению из области определения $D(f)$ функции f соответствует определенное значение $y = f(x)$ *зависимой переменной* y из множества значений $E(f)$ функции f*.

Если x и x_0 — два значения независимой переменной из $D(f)$, то их разность $x - x_0$ называется *приращением независимой переменной* и обозначается через Δx (читается: «дельта икс»).

* Условившись в качестве независимой переменной употреблять букву x, можно более кратко функцию f, заданную формулой $f(x) = y = x^3 - 3x$, называть «функцией $x^3 - 3x$» или «функцией $y = x^3 - 3x$». Дальше мы часто будем пользоваться такими сокращенными оборотами речи.

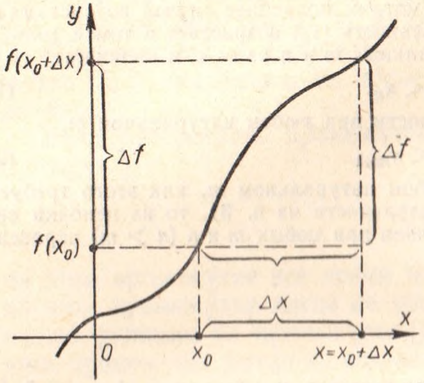

Рис. 30

Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,$$

откуда следует, что

$$x = x_0 + \Delta x.$$

При этом говорят, что первоначальное значение x_0 независимой переменной «получило приращение Δx». Вследствие этого значение функции изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эта разность между новым значением функции $f(x_0 + \Delta x)$ и первоначальным ее значением $f(x_0)$ называется *приращением функции f в точке x_0* и обозначается символом $\Delta f(x_0)$ (читается: «дельта эф в точке x_0»). Так что $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Короче $\Delta f(x_0)$ называют *приращением зависимой переменной* и обозначают через Δf или Δy (рис. 30).

Употребляя введенную терминологию, можно следующим образом переформулировать определения возрастающих и убывающих функций.

Функция называется возрастающей, если ее приращения в каждой точке x_0 положительны при любых положительных приращениях независимой переменной; убывающей, если ее приращения в каждой точке x_0 отрицательны при любых положительных приращениях независимой переменной. При этом если речь идет о возрастании или убывании не на всей действительной оси, а только на некотором ее подмножестве E, то имеют в виду только приращения независимой переменной при переходе от точки x_0 из этого множества к точке x из того же множества.

Рассмотрим два примера, которые позволят нам понять основной замысел важного раздела нашего курса, посвященного началам дифференциального исчисления (оно составляет главное содержание этой и следующих глав учебника).

Первый пример будет очень простым. Мы применим новый метод исследования к функции $f(x) = x^2$. При этом мы узнаем мало нового об этой функции, но зато поймем основы нового метода.

Второй пример будет интереснее. Исследовать на возрастание и убывание функцию $f(x) = x^3 - 3x$ при помощи тех способов, которые вы уже знаете, было бы не очень легко. Новый метод позволит это сделать очень просто.

Пример 1. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$f(x) = x^2.$$

Вычислим приращение функции в точке x:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Если приращение Δx мало по абсолютной величине, то его квадрат будет еще много меньше. Например, если $\Delta x = 0{,}001$, то $(\Delta x)^2 = 0{,}000001$. Поэтому естественно считать

$$2x\Delta x$$

главной частью приращения функции и надеяться на то, что уже она одна поможет нам решить вопрос о возрастании или убывании функции.

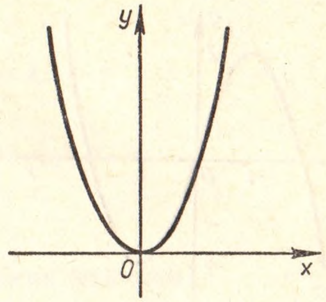

Рис. 31

Для положительных приращений Δx имеем:

$$2x\Delta x > 0 \text{ при } x > 0;$$
$$2x\Delta x < 0 \text{ при } x < 0.$$

Таким образом, мы снова убедились, что функция $x \to x^2$ действительно убывает на отрицательной полуоси и возрастает на положительной (рис. 31).

Пример 2. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Вновь вычислим приращение функции в произвольной точке x:

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) - (x^3 - 3x).$$

Сгруппировав вместе члены с одинаковой степенью приращения Δx, получим:

$$\Delta f(x) = (3x^2 - 3)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Естественно считать здесь главной частью приращения выражение

$$(3x^2 - 3)\Delta x.$$

Тогда если в точке x коэффициент $3x^2 - 3 > 0$, то при достаточно малых $\Delta x > 0$ будет $\Delta f > 0$. Возникает гипотеза: если на интервале $3x^2 - 3 > 0$, то на этом интервале функция возрастает, а если $3x^2 - 3 < 0$ — убывает.

Позднее мы познакомимся с общими положениями, которые позволят ее обосновать без громоздких вычислений. Остается исследовать, при каких x выражение $3x^2 - 3$ положительно, а при каких x — отрицательно. Решая уравнение

$$3x^2 - 3 = 0,$$

получаем два корня $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Выражение $3x^2 - 3$ отрицательно в промежутке $]-1; 1[$ между этими корнями, а при $x < -1$ и при $x > 1$ положительно. Следовательно, функция

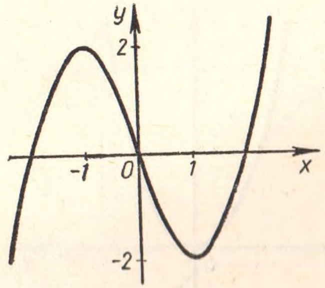

Рис. 32

$f(x) = x^3 - 3x$ возрастает в промежутке $]-\infty; -1]$, убывает в промежутке $[-1; 1]$ и вновь возрастает в промежутке $[1; +\infty[$ (рис. 32). При $x = -1$ имеем $f(-1) = 2$. Это максимальное значение функции в том смысле, что слева от точки $x = -1$ функция возрастает, а справа от нее убывает. Аналогично значение $f(1) = -2$ является минимальным (слева от точки $x = 1$ функция убывает, а справа от нее возрастает). Говорят, что данная функция имеет в точке $x = -1$ максимум, а в точке $x = 1$ минимум.

Упражнения

298. Для функции $y = 2x + 5$ найдите:

а) x, если $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}2$;
б) x, если $x_0 = 4$ и $\Delta x = 0{,}02$;
в) Δy, если $x_0 = 4$ и $\Delta x = 0{,}1$;
г) Δy, если $x_0 = 7$ и $\Delta x = 0{,}01$.

299. Для функции $y = x^2$ найдите:
а) приращение Δx, если $x = 2{,}5$ и $x_0 = 2$, и соответствующее Δy;
б) приращение Δx, если $x = 3{,}9$ и $x_0 = 3{,}75$, и соответствующее Δy.

300. Для функции $y = \frac{1}{x}$ найдите Δy, если:

а) $x_0 = 9$; $\Delta x = 0{,}06$; в) $x_0 = 5{,}06$, $\Delta x = -0{,}3$;
б) $x = 4{,}02$, $\Delta x = 0{,}02$; г) $x = 6$, $\Delta x = -0{,}02$.

301. Запишите приращение функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, для функций:

а) $y = 5 - 3x$; в) $f(x) = 3x^2$;
б) $y = 2\sqrt{x}$; г) $f(x) = 2x - x^2$.

302. Найдите $f(x+h)$, $f(x+h) - f(x)$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

а) при $f(x) = x^2$; в) при $f(x) = ax^2 + bx + c$
б) при $f(x) = kx + b$; г) при $f(x) = x^3$.

303. Найдите $\frac{f(x+h) - f(x)}{2h}$:

а) при $f(x) = x^2$; б) при $f(x) = x^3$.

304. Найдите $\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$:

а) при $f(x) = x^2$; б) при $f(x) = x^3$.

305. Докажите, что для функции $f(x) = kx + b$

$$\Delta f(x) = k\Delta x.$$

306. Найдите главную часть приращения функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

37. Производная как скорость изменения функции

П р и м е р. Рассмотрим падение тела, при котором пройденный путь s как функция времени t задается формулой

$$s = s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Выберем какой-либо момент времени t_0 и рассмотрим промежуток времени длительности Δt от момента t_0 до момента

$$t = t_0 + \Delta t.$$

За этот промежуток времени тело пройдет путь

$$\Delta s = s(t) - s(t_0) = \frac{g}{2}((t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2) = gt_0\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

По известному из физики определению отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0 + \frac{g}{2}\Delta t$$

есть *средняя скорость* тела на промежутке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$.

Примем, что $g = 9{,}8$, и подсчитаем средние скорости за промежутки времени различной длительности, начинающиеся в момент времени $t_0 = 2$.

Δt	1	0,1	0,01	0,001
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	24,5000	20,0900	19,6490	19,6049

Мы видим, что при малых Δt вычисленное значение средней скорости оказывается очень близким к значению

$$gt_0 = 19{,}6.$$

Это значение называют *пределом средней скорости при Δt, стремящемся к нулю*, и пишут:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Мы имеем здесь дело с новым понятием, отличным от понятия предела последовательности. Точно это новое понятие *предела функции* будет определено в п. 38.

Естественно, что при любом t_0

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0.$$

Из физики вы уже знаете, что

$$v = gt$$

есть мгновенная скорость падающего тела в момент времени t.

По аналогии со средней и мгновенной скоростью движущегося тела *средней скоростью изменения функции* на промежутке

$$[x_0; x] = [x_0; x_0 + \Delta x]$$

называется отношение приращений функции и независимого переменного:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Предел средней скорости при стремящемся к нулю приращении независимого переменного

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называется *скоростью изменения функции в точке* x_0. Для скорости изменения функции в точке x_0 принято название *производная*. Производная от функции f в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$, так что по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если считать x_0 переменным, то производная оказывается новой функцией от этого переменного. Сама по себе эта функция обозначается просто f'.

Приведем ряд примеров, оговорившись, что пока наши рассуждения имеют предварительный характер, так как мы не имеем еще определения предела функции.

П р и м е р 1. Найти производную функции $f(x) = kx + b$.

$$\Delta f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = k\Delta x,$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = k.$$

Предел постоянного равен этому постоянному. Поэтому при любом x_0

$$f'(x_0) = k.$$

П р и м е р 2. Найти производную функции $f(x) = x^2$.

$$\Delta f(x_0) = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

При Δx, стремящемся к нулю, получаем:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0.$$

Сопоставим этот результат с графиком данной функции $y = x^2$ (см. рис. 31 на стр. 101).

На графике видно, что при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ сначала функция убывает очень быстро, потом все медленнее, до тех пор, пока ее скорость изменения при $x = 0$ не обратится в нуль, а потом начинает возрастать все быстрее и быстрее. Эти наблюдения вполне соответствуют полученной формуле для производной, которую принято записывать так:

$$(x^2)' = 2x.$$

П р и м е р 3. Найти производную функции $f(x) = x^3 - 3x$.

$$\Delta f(x) = (3x^2 - 3)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2 - 3 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Ясно, что при стремлении Δx к нулю стремится к нулю и сумма

$$3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Поэтому

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2 - 3.$$

Сравните этот результат с полученным при разборе примера 2 из пункта 36. Вы видите, что знак производной позволил нам определить, где функция возрастает, а где она убывает. М а к с и м у м и м и н и м у м функции оказывались в тех точках, где производная равна нулю. Позднее мы увидим, что обнаруженные закономерности сохраняются в общем случае. На рисунке 33 изображены графики функции $f(x) = x^3 - 3x$ и ее производной $f'(x) = 3x^2 - 3$. Проследите на этом рисунке, как соответствуют значения и знак производной ходу изменения функции.

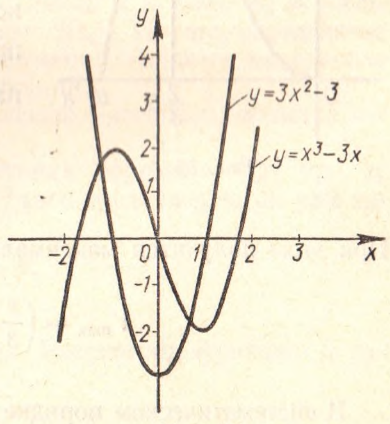

Рис. 33

В заключение первого знакомства с понятием производной решим такую задачу.

З а д а ч а. Из квадратного листа жести со стороной a надо

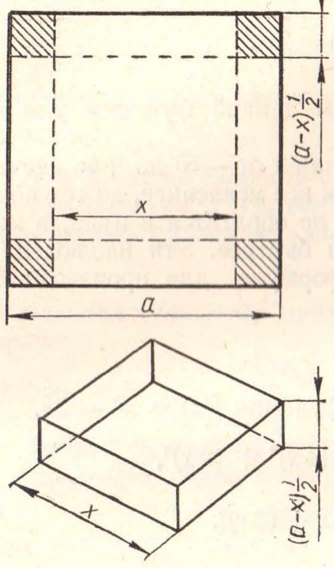

Рис. 34

изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам (рис. 34) квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

Обозначим через x сторону основания коробки. Стороны вырезанных квадратиков будут равны $\frac{1}{2}(a-x)$, а объем коробки равен

$$V(x)=\frac{1}{2}(a-x)x^2.$$

Надо найти максимальное значение этой функции в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$. График функции изображен на рисунке 35. Он построен с учетом замечаний, сделанных к примеру 3. Сначала по образцу предшествующих примеров найдем:

$$V'(x)=-\frac{3}{2}x^2+ax.$$

Приравнивая эту производную нулю, получаем уравнение

$$-\frac{3}{2}x^2+ax=0,$$

которое в промежутке $]0;\ a[$ имеет один корень $x=\frac{2}{3}a$. Из построенного графика видно, что максимальное значение объема V получается при $x=\frac{2}{3}a$, т. е. вырезать по углам надо квадратики со сторонами

$$\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}a\right)=\frac{1}{6}a.$$

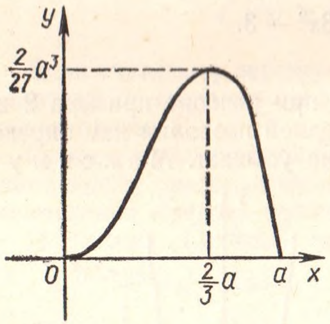

Рис. 35

При этом получится максимально возможный объем коробки:

$$V_{\max}=\left(\frac{2}{3}a\right)^2\frac{1}{6}a=\frac{2}{27}a^3.$$

В систематическом порядке мы вернемся к отысканию максимумов и минимумов функций в п. 55.

Упражнения

307. При помощи производной постройте графики следующих функций:

а) $y=x^3-3x^2-2$; б) $y=x^4-2x^2$.

308. Из прямоугольного листа картона со сторонами 1 *м* и 1,6 *м* изготовьте открытую сверху коробку, вырезав квадратики по углам. Какими должны быть измерения коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

38. Непрерывные и разрывные функции. Предел функции

При вычерчивании графика функции по точкам вам часто советовали провести через нанесенные на бумагу точки «непрерывную кривую». Но вы познакомились в п. 34 с такими функциями, график которых состоит из отдельных отрезков, не примыкающих друг к другу «непрерывно». Например, функция

$$f(x)=\{x\},$$

график которой изображен на рисунке 25, на каждом промежутке $[n;\ n+1[$, где n — целое число, «непрерывно» возрастает, приближаясь к значению единица, но этого значения не достигает, а в точке $x=n+1$ внезапно, скачком возвращается к значению нуль, с которого началось ее постепенное возрастание в точке $x=n$.

Эти наблюдения подводят нас к необходимости различать непрерывные и разрывные функции. Например, рассмотренная сейчас функция «дробная часть от x» непрерывна во всех точках x, кроме целочисленных, в которых она разрывна.

Определение непрерывности функции f в точке x_0 можно сформулировать уже сейчас: *функция f называется* н е п р е р ы в н о й в т о ч к е x_0, *если при стремлении точки x к точке x_0 значение функции $f(x)$ стремится к значению $f(x_0)$.* Но это определение вновь опирается на понятие предела функции. Поэтому мы сначала познакомимся с понятием предела функции.

Далее, в п. 41, мы узнаем, что любой многочлен является непрерывной функцией.

Выясним точный смысл предложения «функция $f(x)$ при x, стремящемся к a, имеет предел b». Такое предложение мы уже записывали в виде

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,$$

но еще не дали точного определения.

Начнем с очень простого примера. Рассмотрим функцию f, заданную равенством

$$f(x)=2x+1.$$

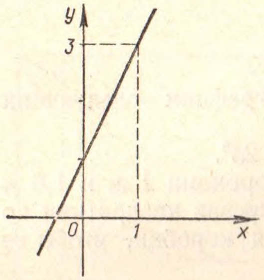

Рис. 36

На ее графике (рис. 36) мы видим, что при приближении точки x к точке $a = 1$ значения этой функции приближаются к числу $b = f(1) = 3$. Естественно считать, что число 3 и есть предел рассматриваемой функции при x, стремящемся к числу 1:

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3. \qquad (1)$$

Каков точный смысл этого утверждения?

Рассмотрим разность

$$f(x) - 3 = (2x + 1) - 3 = 2(x - 1).$$

Ее модуль

$$|f(x) - 3| = |2(x - 1)| = 2|x - 1|$$

есть расстояние между числом $f(x)$ и числом 3. Это расстояние будет меньше 0,01, если

$$|x - 1| < 0{,}005,$$

т. е. если x принадлежит интервалу]0,995; 1,005[.

Если мы пожелаем, чтобы выполнялось другое неравенство

$$|f(x) - 3| < 0{,}0001,$$

то достаточно будет потребовать, чтобы число x удовлетворяло неравенству

$$|x - 1| < 0{,}00005,$$

т. е. чтобы x принадлежало интервалу]0,99995; 1,00005[.

Вообще, задав произвольное (сколь угодно малое) число $\varepsilon > 0$, мы можем утверждать, что модуль разности $f(x) - 3$ будет меньше ε, если только

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существенно здесь только то, что для любого положительного числа ε можно выбрать столь малое положительное число δ (у нас $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$), что из неравенства

$$|x - 1| < \delta$$

будет следовать неравенство

$$|f(x) - 3| < \varepsilon.$$

В этом и заключается смысл высказывания (1).

Определение. *Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε*

найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta,$$

будет выполнено неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Неравенство $|x - a| < \delta$ равносильно двойному неравенству

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

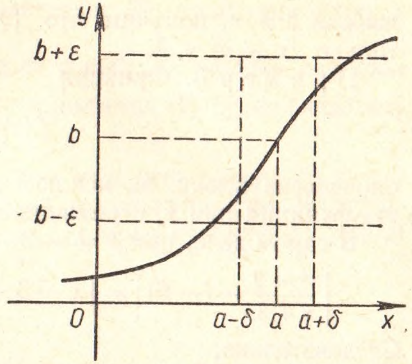

Рис. 37

При любом положительном δ интервал $]a - \delta;\ a + \delta[$ называют *окрестностью точки a*. Пользуясь этим названием, определение предела функции можно сформулировать так:

Число b называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки a, что для любого $x \neq a$ из этой окрестности (рис. 37)

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Из определения предела функции видно, что для существования предела $f(x)$ в точке a необходимо, чтобы функция $f(x)$ была определена во всех точках некоторой окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки a.

Оговорка о том, что функция $f(x)$ может не быть определенной в точке $x = a$, существенна. Без нее понятие предела нельзя было бы применить к определению производной по формуле

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

так как при $\Delta x = 0$ дробь $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ теряет смысл.

Пример 1. Докажем, что предел постоянной функции равен этой же постоянной. В самом деле, если $f(x) = k$ для всех x из некоторого интервала, содержащего точку a, то для таких x

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число. Таким образом,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k.$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = x$ и докажем, что

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

В самом деле, если ε — произвольное положительное число, то, выбрав $\delta = \varepsilon$, получим, что $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$, как только $|x - a| < \delta$.

Пример 3. Функция

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

определена всюду, за исключением точки $x = -3$. Докажем, что эта функция при x, стремящемся к -3, имеет предел, равный -6.

В самом деле, при $x \neq -3$

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x + 3} - (-6)\right| = |x - 3 + 6| = |x + 3| = |x - (-3)|.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x + 3} - (-6)\right| < \varepsilon, \text{ если } |x - (-3)| < \varepsilon \text{ и } x \neq -3.$$

Поэтому если для произвольного положительного числа ε выбрать $\delta = \varepsilon$, то при $|x - (-3)| < \delta$ и $x \neq -3$

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x + 3} - (-6)\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6.$$

Пример 4*. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

Доказательство. Требуется доказать, что для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих условиям

$$|x - 1| < \delta \text{ и } x \neq 1, \tag{2}$$

выполняется неравенство

$$|x^2 - 1| < \varepsilon. \tag{3}$$

Неравенство (3) можно переписать в виде

$$|x + 1| \cdot |x - 1| < \varepsilon. \tag{4}$$

Будем выбирать $\delta \leqslant 1$. Тогда

$$|x - 1| < 1, \text{ т. е. } -1 < x - 1 < 1.$$

Прибавляя ко всем частям этого двойного неравенства число 2, получим:

$$1 < x + 1 < 3.$$

Следовательно,

$$|x + 1| < 3.$$

Поэтому если рассматривать x, удовлетворяющие неравенству

$$3|x - 1| < \varepsilon, \tag{5}$$

то эти x будут удовлетворять и неравенству (4), а следовательно, и неравенству (3).

Из неравенства (5) видно, что если δ выбрать равным наименьшему из двух чисел 1 и $\frac{\varepsilon}{3}$, то из неравенства (2) будет следовать неравенство (3).

Последний пример показывает, что находить предел функции непосредственно на основе определений довольно сложно. На практике пользуются теоремами о пределах, которые приведены в пп. 40 и 41.

Упражнения

Докажите следующие равенства, пользуясь определением предела функции:

309. $\lim\limits_{x \to 3} (2x) = 6$. **310.** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} (5 - 3x) = 4$.

311. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{3}{x} = -1$. **312.** $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

313. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, при $a > 0$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

39. Теорема о единственности предела

Теорема. ***Если функция $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к a, то этот предел единствен.***

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (почему?), что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta,$$

выполняются сразу два неравенства:

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$|b - c| = |[b - f(x)] + [f(x) - c]| \leqslant$$
$$\leqslant |b - f(x)| + |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, неотрицательное число $|b - c|$ меньше любого положительного. Таким числом может быть только число нуль. Поэтому $|b - c| = 0$, $b - c = 0$, и, следовательно, $b = c$.

Таким образом, у данной функции в данной точке может быть не более одного предела. Покажем на примере, что у функции $f(x)$ в данной точке x_0 может совсем не быть предела, хотя она и определена всюду. Таким примером послужит функция

$$f(x) = [x].$$

По ее графику (рис. 24) видно, что она разрывна при всех целых значениях независимой переменной x. Покажем, что не существует $\lim\limits_{x\to 1} [x]$. Будем доказывать методом от противного. Допустим, что такой предел существует и равен a. Тогда или $a > \frac{1}{2}$, или $a \leqslant \frac{1}{2}$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и покажем, что, вопреки определению предела, в любой окрестности точки 1 найдутся точки x, отличные от 1, для которых $|[x] - a| \geqslant \varepsilon$.

В случае $a > \frac{1}{2}$ — это точки x из промежутка $[0;\ 1[$. Для этих точек $[x] = 0$, и поэтому

$$|[x] - a| = |0 - a| = |a| > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon.$$

В случае $a \leqslant \frac{1}{2}$ — это точки x из промежутка $]1;\ 2[$. Для этих точек $[x] = 1$, и поэтому

$$[x] - a = 1 - a \geqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$|[x] - a| = |1 - a| \geqslant \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon.$$

Упражнения

314*. Докажите, что не существует предела функции $y = [x]$ при x, стремящемся к 3.

315*. Докажите, что не существует предела функции $y = \{x\}$ при x, стремящемся к -2.

316. Докажите, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

не существует предела при x, стремящемся к 0.

317. Расскажите, почему функция, график которой изображен на рисунке 38, при x, стремящемся к 1,5, не имеет предела.

318. Расскажите, почему функция, график которой изображен на рисунке 38, при x, стремящемся к -1, имеет предел. Чему равен этот предел?

319. Расскажите, почему функция, график которой изображен на рисунке 38, при x, стремящемся к 2,5, имеет предел. Чему равен этот предел?

320. Расскажите, почему функция, график которой изображен на рисунке 39, при x, стремящемся к 1, имеет предел. Чему равен этот предел? Чему равно значение функции при $x = 1$?

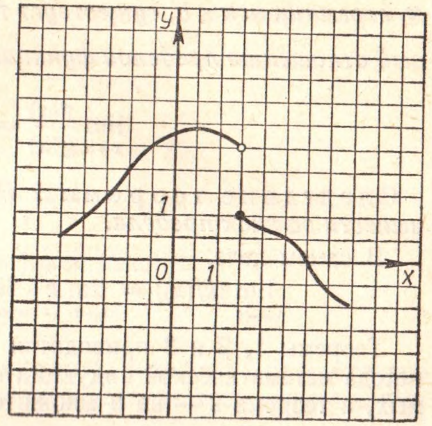

Рис. 38

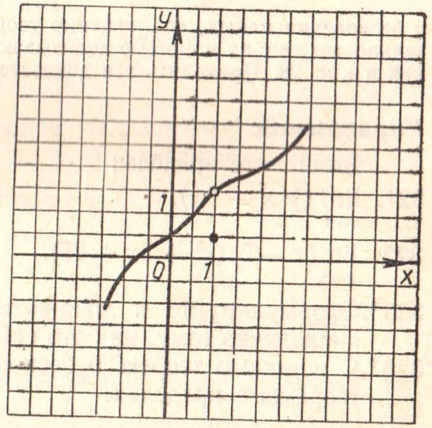

Рис. 39

40. Теоремы о пределах

Основные теоремы о пределах функций, облегчающие вычисление пределов, аналогичны соответствующим теоремам о пределах последовательностей. А именно, для функций справедливы следующие три теоремы, связывающие арифметические операции с переходом к пределу.

Теорема 1. ***Если при x, стремящемся к a, существуют пределы функций f и g, то при x, стремящемся к a, существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций f и g:***

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 2. ***Если при x, стремящемся к a, существуют пределы функций f и g, то при x, стремящемся к a, существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций f и g:***

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 3. ***Если при x, стремящемся к a, существуют пределы функций f и g и предел функции g отличен от нуля, то при***

***x*, стремящемся к *a*, существует также предел отношения $\frac{f}{g}$, равный отношению пределов функций f и g:**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Следствие теоремы 2. ***Постоянный множитель можно вынести за знак предела.***

В самом деле,

$$\lim_{x\to a}(kf(x)) = \lim_{x\to a} k\cdot\lim_{x\to a} f(x) = k\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

Теоремы 1, 2 и 3 приводятся без доказательства. При помощи метода математической индукции теорема 1 обобщается на n слагаемых, а теорема 2 — на n множителей.

Для доказательства этих теорем вводится понятие бесконечно малой функции: *функция α называется бесконечно малой при x, стремящемся к a (или в точке a), если* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Затем доказываются теоремы о бесконечно малых, аналогичные теоремам о бесконечно малых последовательностях, и с их помощью доказываются теоремы о пределах точно так же, как и в п. 28. Приводить эти доказательства мы не будем.

Упражнения

Вычислите пределы:

321. $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}-3x)$.

322. $\lim\limits_{x\to -2}(7+3x+x^2)$.

323. $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)(x^2+5x+25)$.

324. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}+1}{3+x}$.

325*. Сформулируйте и докажите теоремы о бесконечно малых аналогично тому, как это сделано в п. 28.

326*. С помощью теорем о бесконечно малых функциях докажите теоремы о пределах.

41. Непрерывность рациональных функций

Напомним, что любая целая рациональная функция представляется в виде многочлена, любая дробно-рациональная функция — в виде отношения двух многочленов.

Теоремы предыдущего пункта позволяют вычислять пределы многочленов, а при некоторых ограничениях и пределы дробно-рациональных функций. Пусть, например, требуется вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-2}{2x^2+7}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$, то по теореме о пределе произведения

$$\lim_{x\to 3} x^2 = \lim_{x\to 3}(x\cdot x) = \lim_{x\to 3} x\cdot\lim_{x\to 3} x = 3\cdot 3 = 9.$$

По следствию из этой теоремы

$$\lim_{x\to 3} 3x^2 = 3\cdot 9 = 27 \text{ и } \lim_{x\to 3} 2x^2 = 2\cdot 9 = 18.$$

По теореме о пределе суммы

$$\lim_{x\to 3}(3x^2-2) = 27-2 = 25,$$

$$\lim_{x\to 3}(2x^2+7) = 18+7 = 25.$$

По теореме о пределе частного получаем наконец:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-2}{2x^2+7} = \frac{25}{25} = 1.$$

Но такое непосредственное обращение к теоремам предыдущего пункта слишком громоздко. Удобнее пользоваться следующими двумя теоремами.

Теорема 1. ***Для любого многочлена P предел $P(x)$ при x, стремящемся к x_0, равен $P(x_0)$.***

Сначала докажем, что при любом натуральном n

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n. \qquad (1)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) При $n = 1$ имеем: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, т. е. утверждение истинно.

2) Предположив, что при некотором n

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n,$$

получим

$$\lim_{x\to x_0} x^{n+1} = \lim_{x\to x_0}(x^n\cdot x) = \lim_{x\to x_0} x^n\cdot\lim_{x\to x_0} x = x_0^n\cdot x_0 = x_0^{n+1}.$$

Из 1) и 2) по принципу математической индукции заключаем, что (1) верно при любом натуральном n.

Пользуясь формулой (1), докажем теорему 1. Возьмем произвольный многочлен степени n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \text{ где } a_0 \neq 0.$$

Вычислим его предел при x, стремящемся к x_0:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(a_0x^n) + \lim_{x\to x_0}(a_1x^{n-1}) + \ldots + \lim_{x\to x_0}(a_{n-1}x) + \lim_{x\to x_0} a_n =$$
$$= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = P(x_0).$$

По теореме 1 мы можем сразу написать, например,

$$\lim_{x\to 2}(x^3-4x^2+2x-1) = 2^3-4\cdot 2^2+2\cdot 2-1 = -5.$$

Любую дробно-рациональную функцию можно записать в виде

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Она определена при тех значениях независимой переменной, при которых знаменатель Q отличен от нуля. По теореме о пределе частного имеем при $Q(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0).$$

Поэтому верна теорема:

Теорема 2. ***Если число x_0 входит в область определения $D(R)$ дробно-рациональной функции R, то***

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = R(x_0).$$

Например:

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 2}{2x^2 + 7} = \frac{3 \cdot 3^2 - 2}{2 \cdot 3^2 + 7} = 1.$$

Замечание. Теоремой 2 нельзя воспользоваться непосредственно при вычислении предела дробно-рациональной функции в точке, где она не определена. Например, функция

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

не определена при $x = 1$. Но заметив, что при $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1,$$

мы находим ее предел при $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

При вычислении пределов мы уже видели, что для ряда функций выполнено равенство

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad (2)$$

Далее нам встретятся примеры функций, для которых равенство (2) не выполнено. Такие функции называются *разрывными*, а точка a называется их *точкой разрыва*. Те же функции, для которых равенство (2) выполнено, называются *непрерывными в точке a*.

Теперь теоремы 1 и 2 можно сформулировать так: ***многочлены непрерывны при всех значениях независимой переменной; любые рациональные функции непрерывны при всех значениях независимой переменной, при которых они определены.***

Из теорем о пределах п. 40 следует, что сумма, произведение или частное непрерывных в данной точке функций есть тоже непрерывная функция. Для частного надо еще только проверить, чтобы знаменатель не обращался в нуль в рассматриваемой точке.

В X классе будет доказано, что функция $f(x) = \sqrt[n]{x}$ непрерывна для всех $x > 0$ при любом n. Отметим, что для $n = 2$ это доказано в упражнении 313.

Упражнения

Найдите пределы:

327. $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$.

328. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$.

329. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 2}{3x^3 - 1}$.

330. $\lim\limits_{x \to 1} (4x^2 - 2x + 1)$.

331. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$.

332. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)(x^2-1)}{x^3 + x^2 + x}$.

333. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x + 2}$.

334. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$.

335. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

336*. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x}$.

337. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 6}$.

338. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x - 1}$.

339. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$.

340. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{\sqrt{x + 4} - 1}$.

341. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$.

342. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

343. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$.

344. На рисунках 38 — 42 приведены графики функций.

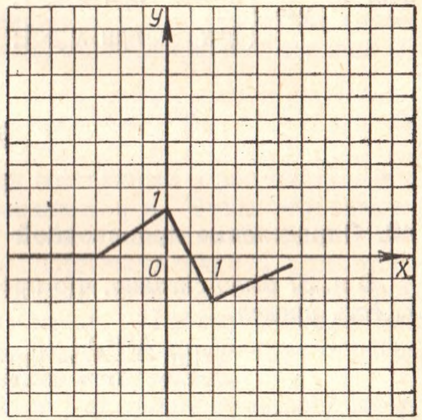

Рис. 40

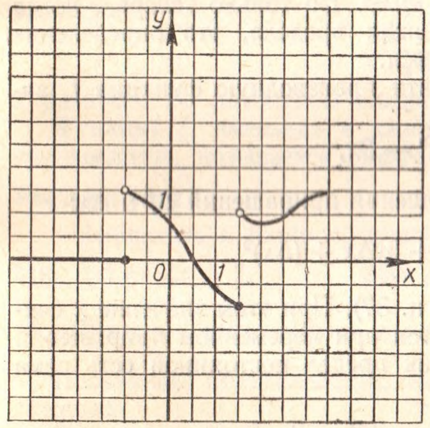

Рис. 41

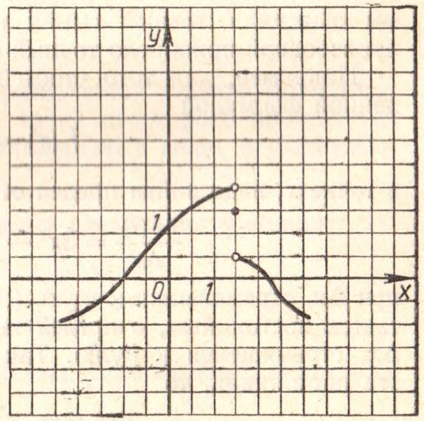

Рис. 42

Какие из них непрерывны, а какие — разрывны? Укажите точки разрыва. Укажите значение функции в точке разрыва.

Постройте графики приведенных ниже функций. Укажите, в каких точках эти функции непрерывны, а в каких — разрывны. Укажите значение функции в точке разрыва:

345. а) $y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x < 0, \\ x \text{ при } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x - 1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 - x \text{ при } x > 0. \end{cases}$

346. а) $y = \begin{cases} 2x^2 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 1 - 2x \text{ при } x > 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1 + 3x \text{ при } x < -1, \\ -x^2 \text{ при } x \geqslant -1. \end{cases}$

347. а) $y = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{при } x \leqslant -3, \\ x + 2 & \text{при } x > -3; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x & \text{при } x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} - 1 & \text{при } x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

348. а) $y = \begin{cases} 2 - x & \text{при } x < 1, \\ \lg x & \text{при } x \geqslant 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{при } x \leqslant -1, \\ 2 & \text{при } x > -1. \end{cases}$

§ 9.

ПРОИЗВОДНАЯ

42. Определение производной

В п. 37 было сказано, что производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 есть предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Или словами: *производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции f в точке x_0 к приращению Δx, когда это последнее стремится к нулю*. Но только теперь, когда мы выяснили точный смысл понятия предела, это определение производной приобрело точный смысл.

Например, для того чтобы найти производную функции f, заданной формулой

$$f(x) = x^3 - 3x,$$

в точке x, надо найти предел отношения приращений Δf и Δx:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2 - 3 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

при Δx, стремящемся к нулю (см. п. 37). При этом значение x считается постоянным, а предел ищется при переменном приращении Δx, стремящемся к нулю. Так как предел постоянной есть сама эта постоянная, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 - 3) = 3x^2 - 3,$$

а

$$\lim_{\Delta x \to 0} (3x\Delta x) = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 0,$$

и по теореме о пределе суммы получаем, наконец:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 - 3 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 - 3.$$

Придадим определению производной несколько другую форму. Вспомним, что

$$\Delta x = x - x_0 \text{ и } x = x_0 + \Delta x.$$

Тогда отношение приращений функции и переменной x приобретает вид:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

Сказать, что приращение Δx стремится к нулю, это то же самое, что сказать: x стремится к x_0. Поэтому определение производной (1) можно записать в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3)$$

В этом определении x_0 считается постоянным и рассматривается предел отношения (2) при x, стремящемся к x_0. Чтобы этот предел мог быть определен, необходимо, чтобы отношение (2) было определено для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0, а для этого необходимо, чтобы сама функция f была определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку. Поэтому ***функция может иметь производную в точке x_0, только если функция определена во всех точках некоторой окрестности точки x_0.***

Операция нахождения производной f' от данной функции f называется *дифференцированием* этой функции. Название это связано с тем, что, прежде чем перейти к пределу, составляется отношение разностей

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

а разность на латинском языке обозначается словом differentia.

Функция f, имеющая в каждой точке некоторого промежутка производную, называется *дифференцируемой в этом промежутке*.

Упражнения

Вычислить в точке x_0 производные следующих функций:

349. $f(x) = 2x + 3$. **350.** $f(x) = 3x - 5$.

43. Примеры вычисления производных

Пользуясь определением, вычислим производные некоторых функций.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = C = \text{const}$$

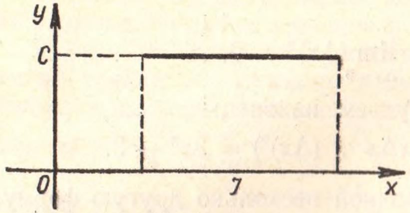

Рис. 43

для всех x из некоторого промежутка I. Найдем производную этой функции:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Следовательно,

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Таким образом, ***производная постоянной равна нулю***

$$(C)' = 0.$$

Этот результат и следовало ожидать — если функция не изменяется, то скорость ее изменения равна нулю (рис. 43).

Пример 2. Найдем производную функции $f(x)=x$:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Пишут также: $(x)' = 1$.

Пример 3. Найдем производную функции $g(x) = x^2$:

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Следовательно,

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

В частности, $g'(2) = 2 \cdot 2 = 4$; $g'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ и т. п.

Пример 4. Продифференцируем функцию (рис. 44):

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $x < 0$. Выберем Δx настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$x + \Delta x < 0.$$

Тогда

$$f(x + \Delta x) = |x + \Delta x| = -(x + \Delta x) = -x - \Delta x \text{ и}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \frac{-x - \Delta x - (-x)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Следовательно, при $x < 0$

$$(|x|)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(-1) = -1.$$

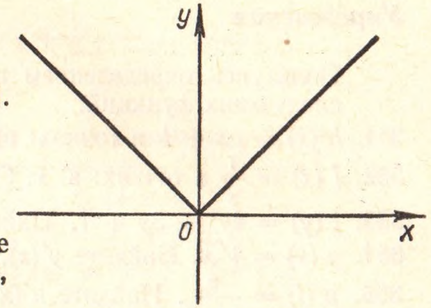

Рис. 44

Аналогично проверяется, что $(|x|)' = 1$ при $x > 0$.

При $x = 0$ данная функция не имеет производной. В самом деле,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{при } \Delta x > 0, \\ -1 & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Но тогда (см. п. 39, упр. 316) не существует предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

а значит, не существует и производной рассматриваемой функции в точке 0.

Действительно, если допустить, что предел (1) существует и равен числу A, то в некоторой окрестности точки 0

$$\left| \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} - A \right| < 1.$$

В частности, при положительных Δx из этой окрестности

$$|1 - A| < 1, \text{ т. е. } -1 < 1 - A < 1, \text{ или}$$
$$0 < A < 2. \qquad (2)$$

Для отрицательных же Δx из этой окрестности $|-1 - A| < 1$, т. е. $-1 < -1 - A < 1$, или

$$-2 < A < 0. \qquad (3)$$

Неравенства (2) и (3) противоречивы, и, следовательно, наше допущение о существовании предела (1) неверно.

Итак, существуют функции, не имеющие производных в некоторых точках.

Из наших рассмотрений следует, что производной функции

$$f(x) = |x|$$

является функция f', определенная на всей числовой прямой, за исключением точки 0:

$$f'(x) = (|x|)' = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

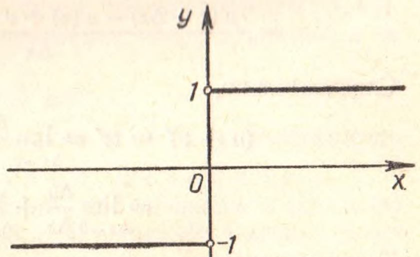

Рис. 45

График этой функции изображен на рисунке 45.

Упражнения

Пользуясь определением производной, найдите производные следующих функций:

351. $h(x) = ax + b$ в точках: а) 2; б) 4.

352. $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках: а) x; б) 1; в) 4.

353. $f(y) = 4y^2 + 3y + 1$. Найдите $f'(x)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(5)$.

354. $y(x) = \sqrt{x}$. Найдите $y'(x)$, $y'(1)$, $y'(4)$.

355. $u(t) = \frac{6}{t-2}$. Найдите $u'(x)$, $u'(1)$, $u'(-1)$, $u'(3)$.

356. $v(x) = \sqrt{6x} + 2$. Найдите $v'(x)$, $v'(1)$.

357. $f(x) = x^3$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$, $f'(2)$.

358. $g(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $g'(x)$, $g'(0)$, $g'(2)$.

Используя материал п. 37, найдите для функций промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума и изобразите их графики:

359. $y = x^3 - x$. **361.** $y = x^3 - 3x^2$.

360. $y = 3x - x^3$. **362.** $y = 3x^2 - x^3$.

44. Производная суммы функций

Пусть u и v — две функции, определенные на одном и том же промежутке.

Теорема. ***Производная суммы двух функций равна сумме их производных, если последние существуют, т. е.***

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).$$

Доказательство. Обозначим сумму $u(x) + v(x)$ через $w(x)$ и вычислим производную этой функции.

$$\frac{\Delta w(x)}{\Delta x} = \frac{w(x+\Delta x) - w(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x) + v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$(u+v)' = w' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Теорема доказана.

Замечание. Методом математической индукции можно доказать, что эта теорема справедлива для любого конечного числа

слагаемых:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n.$$

Упражнения

Пользуясь примерами из п. 43 и упражнениями 352 и 354, найдите производные следующих функций:

363. а) $f(x) = x + 5$; б) $g(x) = x^2 + 3$.

364. а) $h(x) = x^2 + x$; б) $u(x) = x^2 + x + 7$.

365. а) $v(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 5$; б) $y(x) = x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.

366*. Докажите, что производная разности двух функций равна разности производных этих функций, если последние существуют.

45. Производная произведений функций

Лемма. ***Если функция f имеет производную в точке x_0, то***

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Из этой леммы следует, что функция f, имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке. Действительно, так как

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x_0) + \Delta f(x_0),$$

то, вспоминая пояснения к формуле (3) п. 42, имеем:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0) + \Delta f(x_0)) = f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = f(x_0),$$

что доказывает сделанное утверждение.

Важное замечание. Из леммы следует, что если некоторая функция f не является непрерывной в точке x_0, то она в этой точке не имеет производной. Обратное же неверно. Функция может быть непрерывной в точке x_0 и тем не менее в этой точке не иметь производной, как, например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке 0, но не имеет в этой точке производной (см. п. 43).

Теорема. ***Производная произведения двух функций u и v вычисляется по формуле***

$$(uv)' = u'v + uv'$$

в предположении, что производные u' и v' существуют.

Эту формулу называют формулой Лейбница.

Доказательство. Обозначим произведение $u(x) \cdot v(x)$ через $w(x)$ и вычислим производную этой функции. Сначала заметим, что из определения приращения функции

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$$

следует, что

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u,$$

или короче, обозначив $u(x)$ через u:

$$u(x+\Delta x) = u + \Delta u.$$

Аналогично

$$v(x+\Delta x) = v + \Delta v.$$

Тогда

$$\frac{\Delta w(x)}{\Delta x} = \frac{w(x+\Delta x) - w(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)\,v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Поскольку $u = u(x)$ и $v = v(x)$ есть постоянные множители (при фиксированном x), а

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta u = 0$$

в силу леммы (так как функция u дифференцируема), то

$$(uv)' = w' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) =$$

$$= v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v\cdot u' + u\cdot v' + 0\cdot v' = uv' + u'v.$$

Пример 1. $((x+3)(x+15))' = (x+3)'(x+15) + (x+3)(x+15)' = (1+0)\cdot(x+15) + (x+3)\cdot(1+0) = 2x + 18.$

Следствие. ***Постоянный множитель можно выносить за знак производной:***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

В самом деле, применяя теорему к произведению $kf(x)$, где k — число, получим:

$$(kf(x))' = (k)'\,f(x) + kf'(x) = 0\cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).$$

Пример 2. $\left(\frac{x}{15} - 3\right)' = \left(\frac{x}{15}\right)' - 0 = \frac{1}{15}(x)' = \frac{1}{15}.$

Упражнения

Найдите производные следующих функций, пользуясь выведенными в пп. 44 и 45 формулами:

367. а) $y(x) = \frac{x}{5}$; б) $h(x) = -\frac{3x}{4}$.

368. а) $y(x) = 2x - 5$; б) $u(x) = 2 - \frac{7x}{2}$.

369. а) $y(x) = \frac{3}{5}x(x-2)$; б) $u(x) = \frac{(3x+2)(2x-3)}{7}$.

370. $g(x) = (2x-3)(3x+1)$.

371. $y(x) = \left(\frac{3}{5}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{3}x + 3\right)$.

372. $g(x) = (2x-3)^3$. **373.** $u(x) = 3x^2(1-x^2)$.

374. Постройте графики следующих функций:

а) $y = x + \frac{1}{x}$; б) $y = x^2 + \frac{2}{x}$.

46. Производная многочлена

Теорема. ***Производная степенной функции***

$$x \to x^n$$

с натуральным показателем $n > 1$ равна произведению показателя n на степень x^{n-1}, т. е.

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 2$ формула (1) верна (см. пример 3, п. 43). Покажем, что если формула (1) верна при $n = k$, то она верна и при $n = k + 1$. Действительно, по правилу дифференцирования произведения

$$(x^{k+1})' = (x^k\cdot x)' = (x^k)'\cdot x + x^k(x)' = kx^{k-1}\cdot x + x^k\cdot 1 = (k+1)x^k.$$

Отсюда в силу принципа математической индукции следует, что формула (1) верна для всех натуральных $n > 1$.

Из этой теоремы и полученных ранее правил дифференцирования следует, что многочлен есть всюду дифференцируемая функция. Действительно,

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \ldots + (a_{n-1}x)' + (a_n)' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Пример 1. $(x^{10})' = 10x^9$.

Пример 2. $(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)' = 5\cdot 4x^3 + 4\cdot 3x^2 + 2\cdot 3x + 2 = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$.

Упражнения

Найдите производные следующих функций:

375. а) $f(x) = x^4$; б) $g(x) = x^3$; в) $h(x) = (x-4)^4$.

376. а) $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 5x + 9$;
б) $g(x) = 7 - 2x^3 + x^4 - 3x^9$.

377. Постройте графики следующих функций:

а) $y = x^2(x-2)$; б) $y = x^3 - 6x$.

47. Производная частного

Т е о р е м а. ***Если функции u и v имеют в точке x производные и если $v(x) \neq 0$, то в этой точке существует производная их частного $\frac{u}{v}$, которая вычисляется по формуле***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим частное $\frac{u}{v}$ через w. Тогда

$$\frac{\Delta w(x)}{\Delta x} = \frac{w(x+\Delta x) - w(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x \cdot v(v+\Delta v)} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Согласно лемме п. 45 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v(x) = 0$, и потому

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = w' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x \to 0}(v+\Delta v)} =$$

$$= \frac{vu' - uv'}{v \cdot v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

П р и м е р. $\left(\frac{2+3x}{1-2x}\right)' = \frac{(2+3x)' \cdot (1-2x) - (2+3x)(1-2x)'}{(1-2x)^2} =$

$$= \frac{3(1-2x) + 2(2+3x)}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}.$$

Упражнения

378. $f(x) = \frac{1+2x}{1+3x}$. Найдите $f'(y)$, $f'(0)$, $f'(1)$.

379. $g(y) = \frac{2y-3}{1-3y}$. Найдите $g'(y)$, $g'(x)$, $g'(0)$, $g'(1)$.

380. $h(t) = \frac{t^2}{1+6t}$. Найдите $h'(t)$, $h'(0)$, $h'(1)$.

381. $v(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Найдите $v'(x)$, $v'(y)$, $v'(0)$, $v'(1)$.

48. Производная дробно-рациональной функции

Т е о р е м а. ***Производная степенной функции***

$$x \to x^n$$

с целым показателем степени n равна произведению показателя n на степень x^{n-1}, т. е.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (1)$$

при $n \geqslant 2$ для всех x, а при $n \leqslant 1$ для $x \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n > 1$ формула (1) доказана в п. 46. Если $n = 1$, то

$$(x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$$

при $x \neq 0$, и, следовательно, теорема справедлива и для $n = 1$. Формула (1) верна и при $n = 0$: $x^0 = 1$ при $x \neq 0$ и $(1)' = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$. Если n — целое отрицательное число, то $n = -m$, где m — натуральное число. Применяя теорему о производной частного, получим при $x \neq 0$:

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'x^m - (x^m)'}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Теорема доказана.

В частности,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Поскольку дробно-рациональная функция представима как частное двух многочленов, то из предыдущего следует важное утверждение: ***дробно-рациональная функция дифференцируема во всей своей области определения.***

П р и м е р 1. $(x^{-5})' = -5x^{-6}$.

П р и м е р 2. $\left(3x^4 - \frac{7}{x^3}\right)' = 12x^3 + \frac{21}{x^4}$.

Формула (1) справедлива для любого рационального показателя r при $x > 0$ (это будет доказано в X классе):

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

В частности, если $r = \frac{1}{2}$, то $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ (что было найдено в упр. 354, п. 43) и, следовательно,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 3. $(\sqrt[3]{x^4})' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ $(x > 0)$.

Пример 4. $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} =$

$$= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Упражнения

Найдите производные следующих функций:

382. $y(x) = \frac{1}{x^2}$.

383. $f(x) = \frac{5}{x}$.

384. $g(x) = \frac{4}{x^3}$.

385. $h(x) = 3 \cdot x^{-5}$.

386*. При каких $n \in \mathbf{Z}$ существует $(x^n)'$ в точке $x = 0$ и для каких n определяется формулой (1)?

387. Постройте графики функций:

а) $y = 2x + \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

49. Сложная функция

Со сложными функциями вы уже встречались. Например, при вычислении

$$h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

сначала для данного x вычисляют значение функции f:

$$f(x) = 1 - x^2,$$

а по этому значению

$$y = f(x)$$

находят значение функции:

$$g(y) = \sqrt{y}.$$

Функция

$$h(x) = g(f(x)) \qquad (1)$$

и есть *сложная функция*, составленная из функций f и g.

Функции называют иначе *отображениями*. Отображение, определяемое формулой (1), называют *композицией отображений* f и g и обозначают

$$h = g \circ f.$$

Такая терминология в школе употребляется в учебниках геометрии.

Какова область определения сложной функции (1)? Ясно, что эта область определения $D(h)$ должна входить в область определения функции f. Без этого по x нельзя определить $f(x)$, что необходимо для того, чтобы воспользоваться формулой (1). Но из $D(f)$ в $D(h)$ войдут только те точки x, для которых $f(x)$ принадлежит $D(g)$. В нашем примере

$$f(x) = 1 - x^2, \quad g(y) = \sqrt{y}, \quad h(x) = g(f(x)).$$

Областью определения функции f служит вся числовая прямая $\mathbf{R}$. Но для того чтобы $f(x)$ попало в

$$D(g) = \mathbf{R}_0 = [0; \infty[,$$

требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$1 - x^2 \geqslant 0.$$

А оно будет выполнено только при

$$x^2 \leqslant 1,$$

т. е. при

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Значит, областью определения функции

$$h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

является отрезок $[-1; 1]$.

Упражнения

Найдите области определения функции:

388. $y = \lg(9 - x^2)$.

389. $y = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$.

390. $y = \sqrt{\lg x}$.

391. $y = \lg(2 - \sqrt{x})$.

392. $y = \frac{1}{\lg(2 + x^3)}$.

393. $y = \frac{1}{\lg(3 - x) + 1}$.

394. Заданы функции:

$f(x) = 2 - x + x^2$, $g(x) = \lg x$, $h(x) = \frac{x}{3 - x}$,

запишите: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$.

395. Представьте функции, заданные в упражнениях 388—393, как композиции более простых функций.

50. Производная сложной функции

Производная от сложной функции

$$h(x) = g(f(x))$$

находится по замечательной формуле

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \qquad (1)$$

5 Заказ 311

Например, при
$$f(x) = 1 + x^2, \ g(x) = x^{100}$$
получаем:
$$h(x) = (1 + x^2)^{100}.$$
Так как
$$f'(x) = 2x, \ g'(x) = 100x^{99},$$
то
$$((1 + x^2)^{100})' = 100(1 + x^2)^{99} 2x = 200x(1 + x^2)^{99}.$$

Без формулы (1) нам пришлось бы разложить сотую степень $1 + x^2$ по формуле Ньютона и дифференцировать 101 член этого разложения.

Формулу (1) записывают еще и так:
$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x). \qquad (2)$$

Строгое доказательство формулы (2) довольно сложно. Его замысел можно пояснить таким нестрогим рассуждением.

Пусть значение $x = x_0$ соответствует
$$f(x_0) = y_0, \ h(x_0) = g(y_0) = z_0.$$
Если переменной x придать приращение Δx, то переменная y получит приращение
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$
а переменная z — приращение
$$\Delta z = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0).$$
Мы ищем
$$h'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (3)$$
Значение второго множителя в силу определения производной известно:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (4)$$
Чтобы найти значение первого множителя, заметим, что при Δx, стремящемся к нулю, Δy тоже стремится к нулю. Поэтому
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \qquad (5)$$
$$= g'(y_0) = g'(f(x_0)).$$
Из (3), (4) и (5) получим:
$$h'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Один из недостатков такого вывода заключается в том, что не учтена возможность обращения в нуль Δy при $\Delta x \neq 0$. Недостатки этого вывода устранимы. Формула (1) верна при следующих условиях: 1) функция f имеет производную в точке x_0; 2) функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$.

Упражнения

Вычислите производные следующих функций:

396. $y = (3 - 5x + x^2)^{100}$.

397. $y = \sqrt[3]{x^5 - 7x^2 + 9}$.

398. $y = \sqrt{x + 2}\,(x^2 + 7)^{12}$.

399. $y = (2 + 5x)^n$.

400. Из всех цилиндров заданного объема найдите цилиндр с наименьшей полной поверхностью.

Дополнительные упражнения к главе IV

401. Как геометрически изображаются множества:

а) $\{(x;\ y) \mid (x - 2)(y + 3) = 0\}$;

б) $\{(x;\ y) \mid (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0\}$;

в) $\{(x;\ y) \mid |x + y| \leqslant 1$ и $|x - y| \leqslant 1\}$;

г) $\left\{(x;\ y) \,\middle|\, \frac{y}{x} > 1\right\}$;

д) $\left\{(x;\ y) \,\middle|\, \frac{x^2 + y^2 - 1}{y^2 - x^2} = 0\right\}$?

402. Укажите область определения следующих функций:

а) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$;

б) $F(x) = \frac{x - 1}{3x + 2}$;

в) $f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 3x + 2}$;

г) $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1}$;

д) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \frac{2}{\sqrt{x - 4}}$;

е) $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{3 - x}}$;

ж) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}$;

з) $g(x) = \sqrt{(1 - x)(1 + 5x)}$.

403. Найдите $f(6)$; $f(z)$; $f(u)$, если

а) $f(t) = \sqrt{\frac{t - 3}{2 + t}}$;

б) $f(t) = \lg \frac{2 + t}{3t - 1}$;

в) $f(t) = \sqrt{3 + \sqrt{t - 5}}$;

г) $f(t) = \frac{\sqrt{t - 2}}{\lg(t^2 - 3t - 4)}$.

404. В кубе с ребром a проведена плоскость, параллельная диагональной плоскости. Установите зависимость между пло-

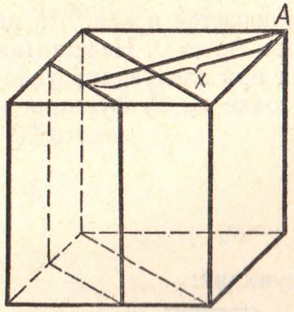

Рис. 46

щадью $S(x)$ сечения и расстоянием x плоскости до вершины A куба (рис. 46). Найдите область определения функции $x \to S(x)$. Нарисуйте ее график.

405. Является ли графиком некоторой функции (какой?) нижняя половина окружности?

406. В каком случае график функции симметричен относительно оси абсцисс?

407. Заданы две функции: $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ и $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$. Истинно ли равенство $f = g$?

408. Найдите промежутки возрастания и убывания функций:

а) $y = (x-1)^2 - 3$; в) $y = -0{,}5 \cdot x^{\frac{1}{3}}$;

б) $y = 3 - (x-2)^2$; г) $y = (0{,}25)^x$.

409. Докажите методом математической индукции, что:

а) функция $x \to x^n$ при четном n убывает на полупрямой $]-\infty;\ 0]$ и возрастает на полупрямой $[0;\ +\infty[$;

б) функция $x \to x^n$ при нечетном n возрастает на всей числовой прямой.

410. Докажите, что если $3x^2 - 3 \neq 0$, то главная часть приращения $(3x^2 - 3) \cdot \Delta x$ для функции $y = x^3 - 3x$ имеет тот же знак, что и приращение функции $\Delta f(x)$, если

$$|\Delta x| < 1 \text{ и } |\Delta x| < \frac{|3x^2 - 3|}{3|x| + 1}.$$

411. При помощи производной постройте графики следующих функций:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 1$; б) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$.

412. Докажите равенство, пользуясь определением предела функции:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{|x|} = 0.$$

413. Объясните, почему неверно равенство

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0.$$

Вычислите пределы:

414. $\lim\limits_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$. **416.** $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$ $(x \geqslant 0)$.

415. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{1 - \sqrt[3]{x^2 - 8}}$.

417. Докажите, что сумма, произведение и частное непрерывных в данной точке функций — функции непрерывные. Для частного надо еще проверить, чтобы знаменатель не обращался в нуль в рассматриваемой точке.

418. $f(y) = 2y^3 + 3y^2 - 2y + 1$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(-2)$.

419. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$, $f'(1)$.

420. Докажите, что функция $g(x) = |x - 1|$ не имеет производной в точке $x = 1$.

421. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ не имеет производной в точке $x = 0$.

422. Докажите правило нахождения производной суммы конечного числа функций.

Найдите производные следующих функций:

423. $v(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x^2 + 2x + 1)$.

424. $f(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$.

425. $f(y) = (3y + 1)(y - 3)$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$, $f'(2)$.

426. $g(u) = 6u^2(5u^3 + 1)$. Найдите $g'(y)$, $g'(0)$, $g'(-1)$.

427. Докажите правило нахождения производной для произведения трех функций u, v, w:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

428. Докажите методом математической индукции формулу производной произведения конечного числа функций.

429. Постройте графики следующих функций:

а) $y = x^2(x-2)^2$; б) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$;

в) $y = x^4 - 4x^2$.

430. $u(z) = \frac{z+5}{1-3z}$. Найдите $u'(z)$, $u'(x-3)$, $u'(0)$, $u'(1)$.

431. $f(l) = \frac{5l - \sqrt{l}}{2l + 2}$. Найдите $f'(l)$, $f'(4)$, $f'(1)$.

432. $h(z) = \frac{2z-3}{4-5z}$. Найдите $h'(z)$, $h'(l)$, $h'(0)$, $-h'(-1)$.

433. $g(x) = \frac{5x+3}{\sqrt{x}+2}$. Найдите $g'(x)$, $g'(4)$, $g'(1)$.

434. $h(u) = \frac{u^3 - 2u^2 + 3u - 4}{u^5}$. Найдите $h'(u)$.

435. $v(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}$. Чему равно $v'(x)$.

436. Найдите $u'(\alpha)$, если $u(\alpha) = \frac{2}{\alpha^4} + \frac{3}{\alpha^5}$.

437. Найдите $\Phi'(v)$, если $\Phi(v)=\frac{5}{v^4}+3v^{-5}$.

438. Постройте график функции $y=\sqrt[3]{x^2}(x-5)$.

Вычислите производные следующих функций:

439. $y=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$; **440.** $y=\sqrt[n]{3-2x}$.

Постройте графики функций:

441. $y=x\sqrt{2-x^2}$. **442.** $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$.

443. В пунктах A и B расположены два громкоговорителя, один из которых ведет передачу в 8 раз громче другого. Найдите на отрезке AB место, в котором суммарная громкость передачи наименьшая.

444. $f(t)=\sqrt{t^4-t^3+t^2-1}$. Найдите $f'(t)$, $f'(2)$.

445. $g(y)=\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2+1}}$. Найдите $g'(x)$, $g'(2)$.

446. $h(t)=\sqrt{\frac{t^3+1}{t^2+1}}$. Найдите $h'(2)$.

447. Найдите производную функции $\sqrt{(5x^3-2x+1)^{61}}$.

Глава V ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 10. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ, ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

51. Главная часть приращения функции

Из определения производной функции f в точке x_0

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

следует, что для всех достаточно малых Δx

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\approx f'(x_0),$$

так что

$$\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

Эта формула является основной для простейших приближенных вычислений.

Пример 1. Выведем приближенную формулу

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x \text{ при } x_0\neq 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[n]{x}$. При $x\neq 0$

$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

Поэтому в силу формулы (1)

$$\Delta f(x_0) = \sqrt[n]{x_0+\Delta x} - \sqrt[n]{x_0} \approx \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\cdot \Delta x,$$

откуда следует после переноса $\sqrt[n]{x_0}$ в правую часть полученного приближенного равенства, что

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\cdot \Delta x. \qquad (2)$$

Например,

$$\sqrt{4{,}01} = \sqrt{4+0{,}01} \approx \sqrt{4} + \frac{\sqrt{4}}{2\cdot\sqrt{4}}\cdot 0{,}01 = 2{,}0025.$$

Значение $\sqrt{4{,}01}$ с девятью знаками после запятой* таково:

$$\sqrt{4{,}01} \approx 2{,}002498440.$$

Смысл приближенного равенства (1) состоит в следующем. Разность между левой и правой частью этого равенства есть функция от Δx; обозначим ее через $R(\Delta x)$.
Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + R(\Delta x), \qquad (3)$$

где функция $R(\Delta x)$ такая, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{R(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \qquad (4)$$

Действительно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{R(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0) - f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Если для функции f выполнены равенства (3) и (4), то коротко говорят, что первое слагаемое в равенстве (3) (т. е. $f'(x_0)\Delta x$) есть главная часть приращения функции f, а остаток $R(\Delta x)$ (второе слагаемое) есть бесконечно малая по сравнению с Δx (точный смысл этого предложения записан формулой (4)).

Пример 2. Вычислить приближенно, пользуясь формулой (2): а) $\sqrt[3]{27{,}03}$; б) $\sqrt[10]{1000}$. По формуле примера 1 имеем:

$$\text{а)}\quad \sqrt[3]{27{,}03} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{\sqrt[3]{27}}{3\cdot 27}\cdot 0{,}03 = 3 + \frac{0{,}01}{9} \approx 3{,}0011;$$

$$\text{б)}\quad \sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10}-24} = 2\sqrt[10]{1-\frac{24}{2^{10}}} \approx$$

$$\approx 2\left(\sqrt[10]{1} + \frac{\sqrt[10]{1}}{10\cdot 1}\left(-\frac{24}{2^{10}}\right)\right) = 2 - \frac{3}{2^6\cdot 10} \approx 1{,}995.$$

* См. способ вычислений, описанный в п. 32.

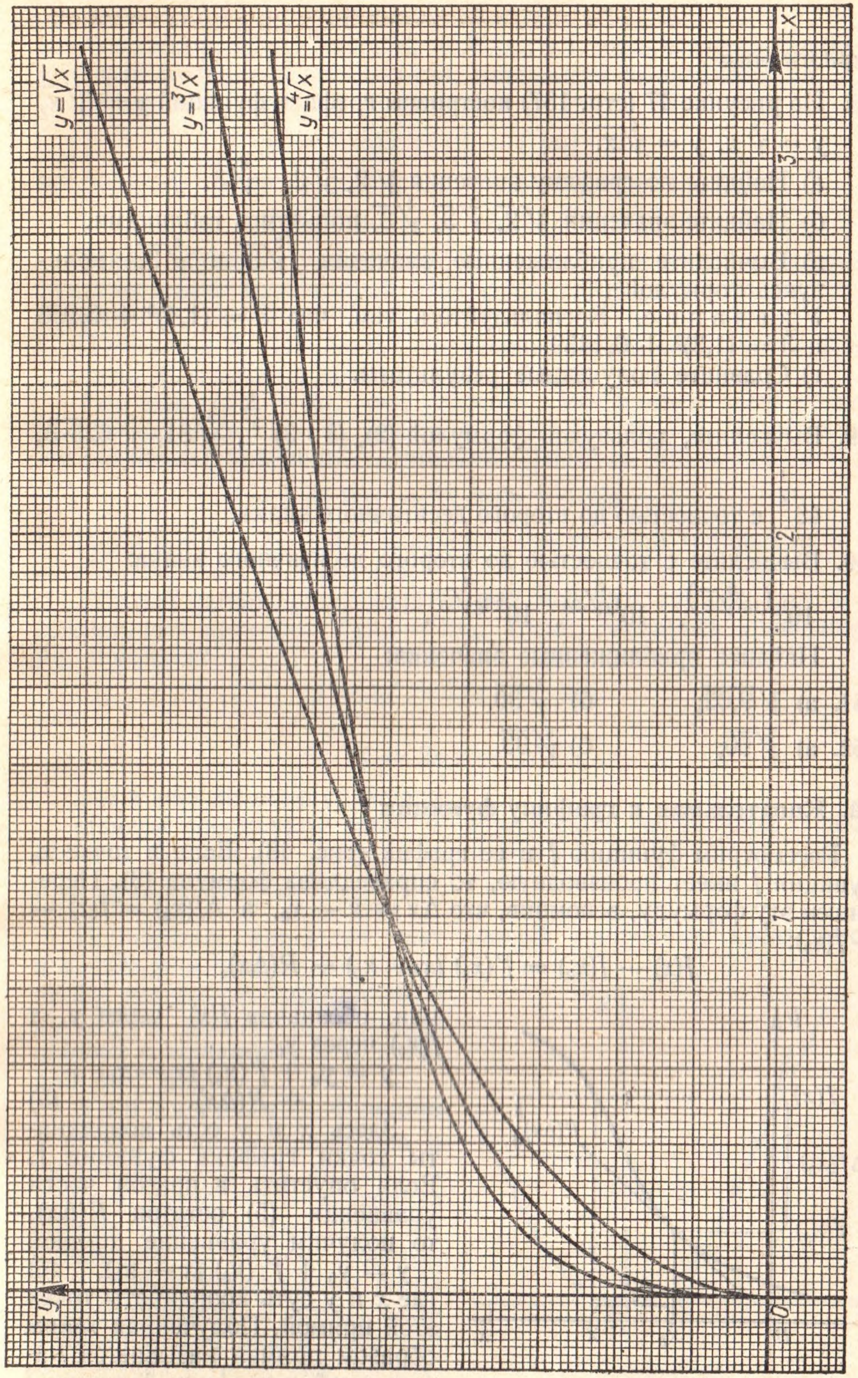

Рис. 47

Упражнения

448. На рисунке 47 (стр. 137) построены графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$.

а) Найдите по графику значения $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}$.

б) Найдите значения $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}$, пользуясь таблицами.

в) Вычислите приближенные значения $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{3}$, пользуясь формулой (2).

Указание. Воспользуйтесь тем, что $3 = (1{,}4)^3 + 0{,}256$ и $3 = (1{,}3)^4 + 0{,}1439$.

г) Сравните полученные результаты.

449. Вычислите, пользуясь формулой (2), $(8 \cdot 3)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[4]{625 \cdot 3}$, $48^{\frac{1}{4}}$ с точностью до второго десятичного знака.

450. Вычислите с точностью до второго десятичного знака:

$$10^{\lg\left(10 \cdot \sqrt[3]{3}\right)}, \quad 10^{\lg\sqrt[3]{24}}, \quad 10^{2\lg\sqrt[4]{3}}.$$

Найдите приближенные значения:

451. а) $\sqrt{9{,}02}$; б) $\sqrt[3]{30}$.

452. а) $\sqrt[4]{90}$; б) $\sqrt[5]{33}$.

52. Касательная к графику функции

Рассмотрим функцию f и ее график (рис. 48). Если в точке x_0 функция f имеет производную, то справедлива формула (3). Перепишем эту формулу, вспомнив, что $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R(\Delta x),$$

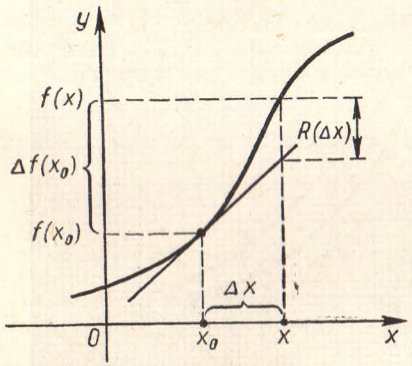

Рис. 48

или, обозначив $f(x)$ через y, а $f(x_0)$ через y_0:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + R(\Delta x). \qquad (5)$$

Здесь x и y есть координаты точки графика функции f. Если опустить в правой части уравнения (5) остаток $R(\Delta x)$, то получим уравнение прямой

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (6)$$

где x и y суть координаты точек этой прямой. Полученная таким образом прямая называется касательной к графику функции f

в точке с абсциссой x_0. Точка $M_0 = M(x_0; y_0)$, через которую проходят и график функции и касательная, называется *точкой касания*.

Переписав уравнение касательной (формулу (6)) в виде

$$y = f'(x_0)x + (y_0 - f'(x_0) \cdot x_0),$$

мы получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$k = f'(x_0) \text{ и } b = y_0 - f'(x_0)x_0.$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции равен производной этой функции, вычисленной в точке касания.

Пример 1. Написать уравнение касательной к графику функции x^2 в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Так как $(x^2)' = 2x$, то угловой коэффициент касательной $f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2$. Далее, $y_0 = f(x_0) = 1^2 = 1$. Подставляя эти значения в уравнение касательной (формула (6)), получаем:

$$y = 1 + 2(x - 1), \text{ или } y = 2x - 1.$$

Пример 2. Найдите уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $M_0 = M(x_0; x_0^2)$.

Угловой коэффициент касательной находим так же, как и в предыдущем примере: $f'(x_0) = 2x_0$. Тогда, пользуясь уравнением (6), получаем:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0),$$

или

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Это и есть искомое уравнение.

Найдем координаты точки T пересечения касательной с осью абсцисс. Если $(x_1; 0)$ — координаты точки T, то $0 = 2x_0x_1 - x_0^2$, и если $x_0 \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{2}x_0$.

Полученный результат дает способ построения касательной к параболе в произвольной точке M_0: достаточно соединить точку M_0 с точкой T, делящей отрезок с концами O и x_0 пополам (рис. 49).

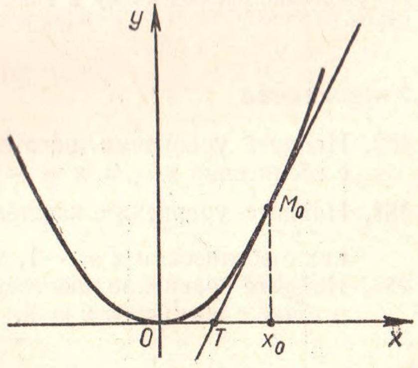

Рис. 49

Замечание 1. Функция $\sqrt{a^2 - x^2}$ дифференцируема в интервале $]-a; a[$, поэтому в каждой точке этого интервала график этой функции имеет касательную. С другой стороны, этот график представляет собой полуокружность, и потому касательная к этой линии была еще определена в геометрии. Оказывается, что оба определения дают одну и ту же прямую.

Замечание 2. Касательная к графику функции может пересекать этот график в другой точке, в отличие от касательной к окружности, которая имеет с окружностью только одну общую точку. Например, касательная к графику функции x^3 в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$ (рис. 50) имеет уравнение (проверьте это с помощью вычислений):

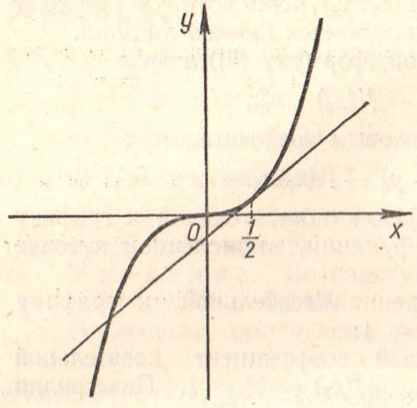

Рис. 50

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Однако эта прямая пересекается с графиком функции еще в точке (—1; —1). Проверьте это самостоятельно.

Замечание 3. Рассмотрим расстояние между точкой графика функции и точкой касательной к этому графику, имеющими одну и ту же абсциссу. Из формул (5) и (6) (см. также рис. 48) видно, что это расстояние равно $|R(\Delta x)|$, и потому есть бесконечно малая по сравнению с Δx (при Δx, стремящемся к нулю). Поскольку для точки $A = M(x; f(x))$ $|\Delta x| \leqslant |AM_0|$, то

$$\frac{|R(\Delta x)|}{|AM_0|} = \left|\frac{R(\Delta x)}{\Delta x}\right| \cdot \frac{|\Delta x|}{|AM_0|},$$

и потому это бесконечно малая функция при Δx, стремящемся к нулю, как произведение бесконечно малой функции (первый множитель) на ограниченную функцию (второй множитель). Следовательно, рассматриваемое расстояние есть также и бесконечно малая по сравнению с расстоянием $|AM_0|$, «когда точка A стремится по графику к точке M_0». Это уже чисто геометрическая характеристика касательной, надо дать только точное определение утверждению, заключенному в кавычки, но это выходит за рамки нашего курса.

Упражнения

453. Найдите уравнения касательных к параболе $y = x^2$ в точках с абсциссами $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

454. Найдите уравнения касательных к гиперболе $y = \frac{2}{x}$ в точках с абсциссами $x = -1$, $x = 1$.

455. Найдите уравнение касательной к кубической параболе $y = x^3$ в точке с абсциссой $x = 2$.

53. Скорость и ускорение

Пусть точка движется по прямой и в момент времени t находится в точке с координатой $x(t)$. Производная функции x от времени

$$v(t) = x'(t)$$

есть не что иное, как **скорость** v нашей точки в момент времени t.

В применении к задаче о падении тела под действием силы тяжести об этом уже говорилось в п. 37.

Пусть координата точки зависит от времени квадратически:

$$x(t) = pt^2 + qt + r, \quad p \neq 0. \tag{1}$$

Тогда скорость точки выражается формулой

$$v(t) = x'(t) = 2pt + q. \tag{2}$$

Найдем производную функции v, заданной формулой (2):

$$a(t) = v'(t) = 2p. \tag{3}$$

Это не что иное, как *скорость изменения скорости* в движении, заданной формулой (1), т. е. *ускорение* при этом движении. Мы видим, что ускорение при движении по квадратическому закону (1) постоянно. Если $p > 0$, то мы имеем дело с равномерно ускоренным движением, если же $p < 0$, то с равномерно замедленным.

Верно и обратное:

Если при движении точки по прямой ускорение постоянно, то движение управляется квадратичным законом вида (1), где коэффициент p при t^2 есть половина ускорения:

$$p = \frac{1}{2}a.$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ координата точки есть

$$x_0 = x(0) = r,$$

а скорость $v(t)$ равна

$$v_0 = v(0) = q.$$

Мы видим, что

$$p = \frac{1}{2}a, \quad r = x_0, \quad q = v_0.$$

Поэтому уравнение равномерно ускоренного и равномерно замедленного движения (1) можно записать в виде

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0, \tag{4}$$

где x_0 — начальная координата точки, v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

Рассмотрим более сложный пример. Тело, брошенное с поверхности Земли вертикально вверх в начальный момент времени $t = 0$ со второй космической скоростью, удаляется от центра Земли по закону.

$$x(t) = D(t + c)^{\frac{2}{3}}. \qquad (A)$$

Смысл констант D и c вскоре выяснится. Если R — радиус Земли, то

$$x(0) = Dc^{\frac{2}{3}} = R. \qquad (5)$$

Это первое соотношение между константами D и c.

Вычисляя первую и вторую производную функции x от времени t, получаем скорость и ускорение рассматриваемого тела:

$$v(t) = x'(t) = \frac{2}{3}D(t + c)^{-\frac{1}{3}}, \qquad (Б)$$

$$a(t) = v'(t) = -\frac{2}{9}D(t + c)^{-\frac{4}{3}}. \qquad (В)$$

На поверхности Земли ускорение равно ускорению силы тяжести со знаком минус:

$$a(0) = -\frac{2}{9}Dc^{-\frac{4}{3}} = -g. \qquad (6)$$

Это дает второе соотношение между константами D и c. Из формул (5) и (6) можно вычислить константы D и c.

Заметьте, что вторая космическая скорость — это скорость тела v_0 в начальный момент времени $t = 0$:

$$v_0 = \frac{2}{3}Dc^{-\frac{1}{3}}. \qquad (7)$$

Из соотношений (5), (6) и (7) можно вычислить v_0, зная R и g.

Из уравнений (А) и (В) получаем:

$$a(t) = -k \cdot x^{-2}(t), \text{ где } k = gR^2 = \frac{2}{9}D^3.$$

Мы видим, что движение тела подчинено закону тяготения Ньютона: вызываемое притяжением Земли ускорение тела обратно пропорционально квадрату его расстояния от центра Земли.

Формула (А) была получена теоретически из закона тяготения Ньютона, в отличие от формулы Галилея $h = \frac{gt^2}{2}$, которая была найдена в результате обработки наблюдений. Но для этого надо уметь по заданной зависимости между функцией $x(t)$ и ее второй производной $x''(t)$ находить саму функцию $x(t)$. Это уже задача «интегрирования дифференциальных уравнений». С ней на более простых примерах вы познакомитесь в X классе.

Упражнения

456. Человек приближается со скоростью 8 *км/ч* к подножию башни высотой 60 *м*. Какова скорость его приближения к вершине башни, когда он находится на расстоянии 80 *м* от ее основания?

457. Вращение тела вокруг оси совершается по закону

$$\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2 \ (рад).$$

Найдите угловую скорость $\omega(t)$ в произвольный момент времени t и при $t = 4$ (*сек*).

458. Маховик, задерживаемый тормозом, за t (*сек*) поворачивается на угол $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ (*рад*). Определите: 1) угловую скорость $\omega(t)$ вращения маховика в момент времени $t = 2$ (*сек*); 2) в какой момент времени вращение маховика прекратится.

459. Пусть точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = 2t^3 + t - 1 \ (см).$$

Найдите:
1) ускорение в момент времени t (*сек*);
2) в какой момент времени ускорение будет равно:
а) 1 *см/сек*^{2}; б) 2 *см/сек*^{2}.

460. Тело массой 2 *кг* движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + t + 1$, где $s(t)$ — путь в сантиметрах, t — время в секундах.
Найдите:
1) действующую силу;
2) кинетическую энергию E тела через 2 *сек* после начала движения.

461. Пусть известно, что для любой точки C стержня AB, отстоящей от точки A на расстоянии l (*см*), масса куска стержня AC определяется по формуле $m(l) = 3l^2 + 5l$ (*г*). Найдите линейную плотность стержня:
а) в точке $l = 10$ (*см*); б) в конце B стержня при условии, что $|AB| = 20$ *см*.

462. Найдите силу F, действующую на материальную точку C массой m, движущуюся прямолинейно по закону $s(t) = 2t^3 - t^2$ (*м*) при $t = 2$ (*сек*).

463. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \sqrt{t}$. Покажите, что ее ускорение пропорционально кубу скорости.

464. Пусть точка движется прямолинейно по закону $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$ (время измеряется в секундах, пройденный путь — в метрах).
Определите:
а) момент времени t, когда ускорение точки равно нулю;
б) с какой скоростью движется в этот момент точка.

§ 11.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

54. Возрастание и убывание функции

В нашем курсе производная появилась (в п. 37) как средство исследования функции. Сейчас мы этим вопросом займемся подробнее.

Т е о р е м а 1. ***Если $f'(x_0)>0$, то существует такое число $\delta>0$, что $f(x)>f(x_0)$ для всех x из интервала*** $]x_0;\ x_0+\delta[$ ***и $f(x)<f(x_0)$ для всех x из интервала*** $]x_0-\delta;\ x_0[$ (рис. 51).

Коротко эту теорему формулируют так: ***если $f'(x_0)>0$, то функция f возрастает в точке x_0.*** Аналогичное утверждение можно сформулировать для убывания функции в точке.

Т е о р е м а 2. ***Если $f'(x_0)<0$, то существует такое число $\delta>0$, что $f(x)<f(x_0)$ для всех x из интервала*** $]x_0;\ x_0+\delta[$ ***и $f(x)>f(x_0)$ для всех x из интервала*** $]x_0-\delta;\ x_0[$ (рис. 52).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Поскольку число

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

то по определению предела для числа $\varepsilon=f'(x_0)>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех $x\neq x_0$ и принадлежащих интервалу $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<f'(x_0),$$

откуда следует, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)>-f'(x_0),$$

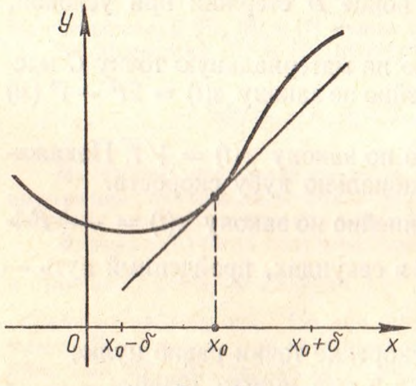

Рис. 51

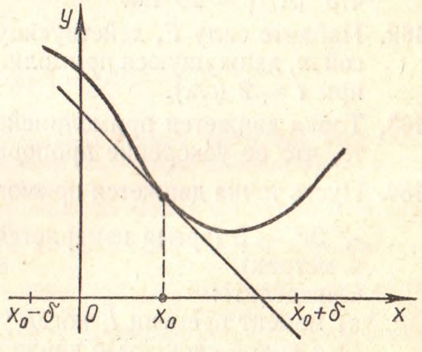

Рис. 52

или

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0. \qquad (1)$$

Для всех x из интервала $]x_0;\ x_0+\delta[$ разность $x-x_0>0$, и потому для этих x имеем $f(x)>f(x_0)$ в силу неравенства (1). Если же x — любое число из интервала $]x_0-\delta;\ x_0[$, то $x-x_0<0$, и потому для этих x имеем $f(x)<f(x_0)$ в силу неравенства (1). Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Рассмотрим функцию $p(x)=-f(x)$. Поскольку $p'(x_0)=-f'(x_0)>0$ по условию теоремы 2, то функция $p(x)$ возрастает в точке x_0 в силу теоремы 1. Следовательно, существует такое число $\delta>0$, что для всех x из интервала $]x_0;\ x_0+\delta[$ выполнено неравенство

$$p(x)>p(x_0),\text{ т. е. } -f(x)>-f(x_0),$$

так что для всех x из интервала $]x_0;\ x_0+\delta[$ имеем:

$$f(x)<f(x_0).$$

А для всех x из интервала $]x_0-\delta;\ x_0[$ выполнено неравенство $p(x)<p(x_0)$, т. е. $-f(x)<-f(x_0)$, так что для всех x из интервала $]x_0-\delta;\ x_0[$ имеем:

$$f(x)>f(x_0).$$

Теорема 2 доказана.

Естественно предположить, что если функция возрастает в каждой точке некоторого интервала, то она возрастает на этом интервале.

Сформулируем теорему о достаточном условии возрастания (убывания) функции на интервале.

Т е о р е м а 3. ***Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала I, то эта функция f возрастает на этом интервале I. Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала I, то эта функция f убывает на этом интервале.***

Доказательство этой теоремы сложно и не входит в программу.

З а м е ч а н и е. Отметим еще (без доказательства), что если функция f монотонна на интервале $]a;\ b[$ и непрерывна в точках a и b, то она монотонна на отрезке $[a;\ b]$.

П р и м е р. Найдем интервалы монотонности и начертим график функции

$$y(x)=x-x^3.$$

Данная функция определена на всей действительной прямой. Так как

$$y'(x)=1-3x^2,$$

то $y'(x)>0$, если $1-3x^2>0$. Решим следующее неравенство:

$$(3x^2<1)\Leftrightarrow\left(x^2<\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\left(|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

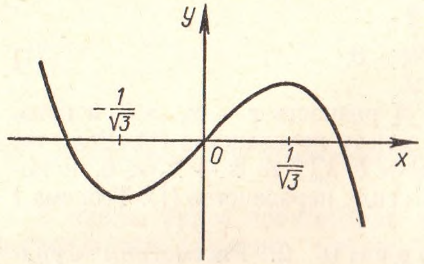

Рис. 53

Следовательно, данная функция возрастает в интервале $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ и убывает для всех x, удовлетворяющих неравенству $1-3x^2<0$, т. е. в промежутках $\left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ и $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};\ +\infty\right[$.

Вычислив значения $y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ и $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, строим график функции (рис. 53).

Упражнения

Определите промежутки монотонности следующих функций:

465. а) $f(x)=3x+1$; б) $g(x)=-4x+2$.

466. а) $f(x)=\frac{2}{x}$; б) $y(x)=\frac{3}{2-x}$.

467. а) $v(x)=x^2$; б) $f(x)=(x-1)^2$.

468. а) $y(x)=5x^2-3x+1$; б) $f(x)=x^2-2x+5$.

469. а) $h(x)=x^3-27x$; б) $u(x)=x^2(x-3)$.

55. Критические точки функции, ее максимумы и минимумы

В предыдущем пункте мы видели, что в точке, в которой производная положительна, функция возрастает, а в точке, в которой производная отрицательна, функция убывает. Остается рассмотреть внутренние точки области определения, в которых производная функция равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими*.

В п. 36 уже упоминались понятия максимума и минимума функции. Теперь дадим определение этих понятий.

О п р е д е л е н и е. *Точка x_0 из области определения функции f называется точкой минимума этой функции, если найдется такая δ-окрестность $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство*

$$f(x)>f(x_0).$$

На рисунке 54 в точках x_1 и x_3 функция f имеет минимумы.

О п р е д е л е н и е. *Точка x_0 из области определения функции f называется т о ч к о й м а к с и м у м а этой функции, если найдется такая δ-окрестность $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство*

$$f(x)<f(x_0).$$

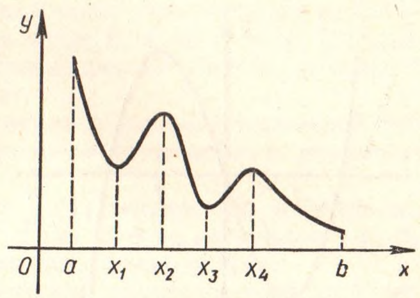

Рис. 54

На рисунке 54 в точках x_2 и x_4 функция f имеет максимумы.

Точки минимума и максимума называются точками *экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках называют *экстремумами функции**.

З а м е ч а н и е. Точки a и b (см. рис. 54) не считаются точками экстремума функции f, так как у этих точек нет окрестности, целиком входящей в область определения функции.

Покажем, что точки экстремума являются критическими для данной функции.

Т е о р е м а Ф е р м а**. ***Если точка x_0 является точкой экстремума для функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю: $f'(x_0)=0$.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности будем считать, что экстремальная точка x_0 есть точка минимума. Проведем доказательство от противного.

Пусть $f'(x_0)\neq 0$. Тогда возможны два случая: $f'(x_0)>0$ и $f'(x_0)<0$.

1. $f'(x_0)>0$. По теореме 1 п. 54 (стр. 144) существует такое $\delta>0$, что для всех x из интервала $]x_0-\delta;\ x_0[$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$. Это неравенство противоречит тому, что точка x_0 есть точка минимума. Полученное противоречие показывает, что неравенство $f'(x_0)>0$ неверно.

2. $f'(x_0)<0$. По теореме 2 п. 54 (стр. 144) существует такое $\delta>0$, что для всех x из интервала $]x_0;\ x_0+\delta[$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$. Это неравенство противоречит тому, что точка x_0 есть точка минимума. Полученное противоречие показывает, что неравенство $f'(x_0)<0$ неверно.

Таким образом, в точке минимума $f'(x_0)$ не может быть больше нуля и не может быть меньше нуля. Следовательно, $f'(x_0)=0$.

* Латинское слово «экстремум» в переводе на русский язык означает «крайний».

** Эта теорема впервые доказана французским математиком Пьером Ферма́ (1601—1665).

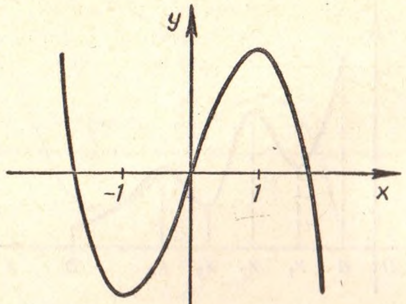

Рис. 55

Точно так же разбирается случай максимума.

Например, для функции $f(x) = 3x - x^3$, график которой изображен на рисунке 55, точкой минимума является -1, а точкой максимума 1. В этих точках производная равна нулю:

$$f'(-1) = 0 \text{ и } f'(1) = 0.$$

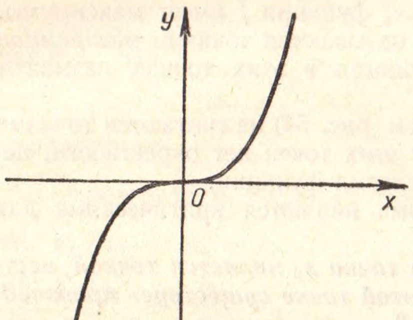

Рис. 56

Подчеркнем, что теорема Ферма есть лишь необходимое условие существования экстремума: из того, что производная в точке обращается в нуль не обязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, для функции $x \to x^3$ производная в точке 0 обращается в нуль, а экстремума в этой точке функция не имеет (рис. 56).

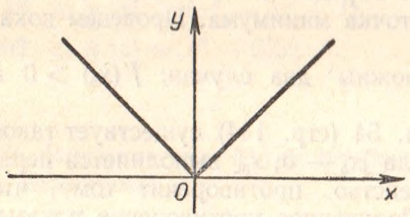

Рис. 57

Мы рассмотрели те критические точки, в которых производная равна нулю. Остается рассмотреть критические точки, в которых производная не существует. В этих точках функция также может иметь или не иметь экстремума.

П р и м е р 1. Рассмотрим функцию $x \to |x|$ (рис. 57). В п. 43 (пример на стр. 121) было показано, что в точке 0 эта функция не имеет производной. Значит, эта точка критическая. По графику же видно, что в точке 0 эта функция имеет минимум.

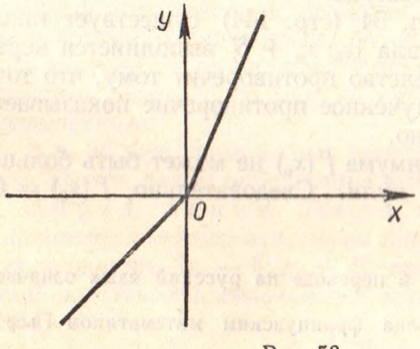

Рис. 58

П р и м е р 2. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + |x|$ (рис. 58). По графику видно, что в точке 0 эта функция не имеет экстремума. В этой точке функция не имеет и производной. В самом деле, из определения данной функции имеем: $|x| = f(x) - 2x$. Если предположить, что функция $f(x)$ в точке 0 имеет производную, то $f(x) - 2x$ также имеет производную в точке 0, а $|x|$ в точке 0 производной не имеет. Получается противоречие. Значит, в точке 0 эта функция производной не имеет.

Чтобы выяснить, имеет ли функция в данной критической точке экстремум, пользуются следующими достаточными условиями существования экстремума.

Т е о р е м а 1. ***Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) < 0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.***

В разговоре пользуются упрощенной формулировкой этой теоремы: если в точке x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то x_0 есть точка максимума.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 3 п. 54 (стр. 145) и замечания к ней. Действительно, на интервале $]a; x_0[$ функция монотонно возрастает. Так как она непрерывна в точке x_0, то $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $]a; x_0[$. На интервале $]x_0; b[$ функция монотонно убывает. Так как она непрерывна в точке x_0, то $f(x) < f(x_0)$ для всех x из $]x_0; b[$.

Таким образом, мы получили, что $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из интервала $]a; b[$, т. е. x_0 есть точка максимума функции $f(x)$.

Т е о р е м а 2. ***Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f'(x) < 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) > 0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.***

В разговоре пользуются упрощенной формулировкой этой теоремы: если в точке x_0 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 есть точка минимума.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 3 п. 54 (стр. 145) и замечания к ней. Предоставляем учащимся провести его самостоятельно по образцу доказательства теоремы 1.

Рассмотрим, например, функцию $3x - x^3$ (см. рис. 55). Ее производная $3 - 3x^2$ меняет знак с «минуса» на «плюс» в точке -1 и с «плюса» на «минус» в точке 1. Отсюда следует в силу теорем 1 и 2, что точка -1 является точкой минимума, точка 1 — точкой максимума.

Упражнения

Найдите критические точки приведенных ниже функций, выяснив, какие из них есть точки максимума, а какие — точки минимума.

470. а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$; б) $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$.

471. а) $h(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; б) $y(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 120$.

472. а) $u(x) = 3x^4 - 4x^3$; б) $v(x) = \sqrt{x}$.

Исследуйте на монотонность и экстремумы следующие функции. Для функций из упражнений 474, 476, 478 постройте графики.

473. а) $v(x) = 4x^2 - 6x$; б) $w(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$.

474. а) $s(t) = \sqrt{t-1}$; б) $u(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $(x \geqslant 0)$.

475. а) $f(x) = 6x^5 + 15x^4 + 10x^3$; б) $g(x) = x^2(x - 12)^2$.

476. $h(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$. **478.** $u(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

477. $y(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$. **479.** $v(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$.

56. Исследование квадратичной функции

Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратичной*. Эта функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Ее производная

$$f'(x) = 2ax + b$$

существует при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и обращается в нуль в единственной точке

$$x_0 = -\frac{b}{2a}. \qquad (1)$$

Значение функции f в этой точке равно:

$$f(x_0) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2}{4a} + c =$$
$$= -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{D}{4a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ есть дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Обозначим $f(x_0)$ через y_0.

Вспомним, что от знака дискриминанта D зависит наличие и число корней квадратного трехчлена: при $D > 0$ трехчлен имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

которые можно записать в виде

$$x_1 = x_0 - \Delta \text{ и } x_2 = x_0 + \Delta, \text{ где } \Delta = \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

при $D = 0$ этот трехчлен имеет один корень:

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

а при $D < 0$ трехчлен не имеет действительных корней.

Исследуем знак производной функции f при $x \neq x_0$. Из равенства (1) следует, что $b = -2ax_0$, поэтому производную f' можно представить в виде

$$f'(x) = 2a(x - x_0).$$

Для исследования функции f по знаку производной f' рассмотрим следующие случаи:

1) Если $a > 0$, то $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. Следовательно, функция f убывает в промежутке $]-\infty; x_0]$ и возрастает в промежутке $[x_0; +\infty[$. В точке x_0 функция f принимает минимальное значение:

$$f_{\min} = f(x_0) = y_0.$$

2) Если $a < 0$, то $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Следовательно, функция f возрастает в промежутке $]-\infty; x_0]$ и убывает в промежутке $[x_0; +\infty[$. В точке x_0 функция f принимает максимальное значение:

$$f_{\max} = f(x_0) = y_0.$$

Каждый из этих двух случаев разбивается на три подслучая в зависимости от знака дискриминанта D.

Расположение графика функции по отношению к оси абсцисс в шести подслучаях изображено на рисунке 59.

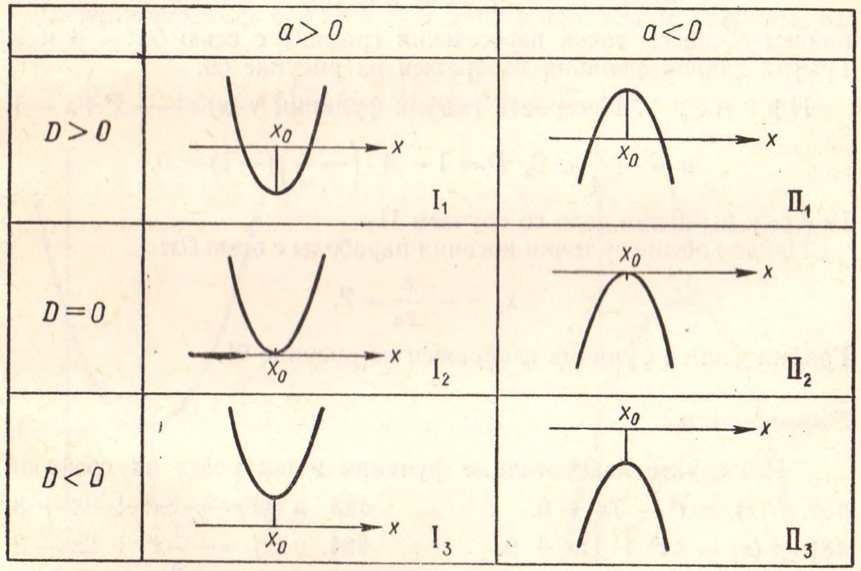

Рис. 59

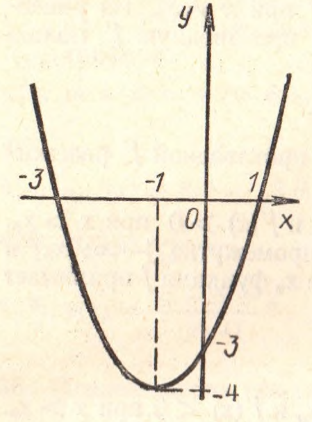

Рис. 60

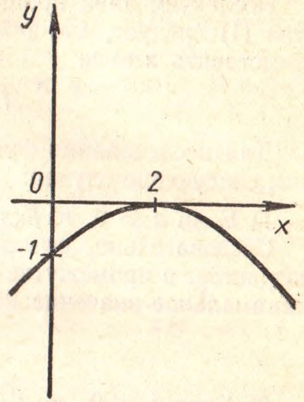

Рис. 61

Пример 1. Построить график функции $y(x) = x^2 + 2x - 3$. Воспользуемся результатами проведенного исследования квадратичной функции. Так как $a > 0$ и $D > 0$ ($a = 1$ и $D = 16$), то мы имеем дело со случаем I_1.

Для построения графика найдем координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -1 \text{ и } y_0 = f(x_0) = -4.$$

Решив уравнение

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

найдем абсциссы точек пересечения графика с осью Ox: -3 и 1. График данной функции изображен на рисунке 60.

Пример 2. Построить график функции $y(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.

$$a = -\frac{1}{4} < 0, \ D = 1 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(-1) = 0.$$

Поэтому мы имеем дело со случаем II_2.

Найдем абсциссу точки касания параболы с осью Ox:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2.$$

График данной функции изображен на рисунке 61.

Упражнения

Исследуйте квадратичные функции и постройте их графики:

480. $f(x) = x^2 - 7x + 6$.
481. $g(x) = 4x^2 + 12x + 9$.
482. $h(x) = x^2 - 3x + 10$.
483. $u(x) = -3x^2 + 8x + 3$.
484. $v(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.
485. $w(x) = -2x^2 + 4x - 7$.

57. Решение квадратичных неравенств

Проведенное исследование квадратичной функции содержит все необходимое для решения квадратичных неравенств.

Пусть требуется решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0. \qquad (1)$$

1) Если дискриминант D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен, то это означает, что график функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

не пересекает оси абсцисс и, следовательно, лежит выше оси абсцисс (если $a > 0$) или ниже ее (если $a < 0$). В первом случае (рис. 62) множество решений неравенства (1) есть множество всех действительных чисел, а во втором (рис. 63) это множество пусто.

2) Если дискриминант D квадратного трехчлена положителен, то график функции f пересекает ось абсцисс в точках x_1 и x_2 (для определенности считаем, что $x_1 < x_2$), являющихся корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

В этом случае функция f имеет один и тот же знак во всех точках промежутка $]x_1; x_2[$ и противоположный ему — в промежутках $]-\infty; x_1[$ и $]x_2; +\infty[$ (рис. 64 и 65). В промежутках $]-\infty; x_1[$ и $]x_2; +\infty[$ знак функции f совпадает со знаком числа a. Этих сведений достаточно для решения вопроса о том, какие из промежутков содержат решения данного неравенства.

3) Случай $D = 0$ рассмотрите самостоятельно (см. упр. 493).

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + x - 1 > 0$.

Дискриминант $D = 1 + 8 = 9 > 0$; ищем корни квадратного трехчлена:

$$(2x^2 + x - 1 = 0) \Leftrightarrow \left(x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = -1; \ x_2 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}\right).$$

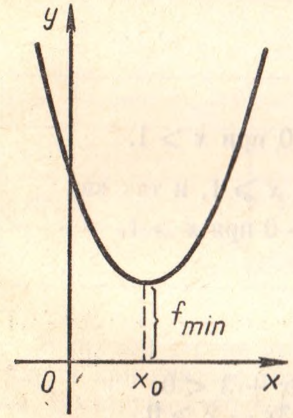

Рис. 62

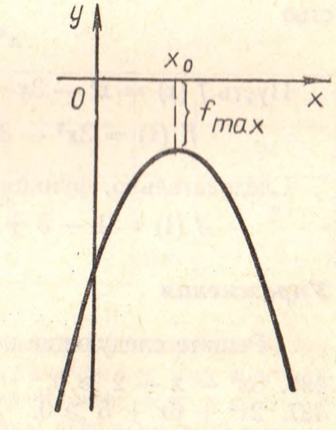

Рис. 63

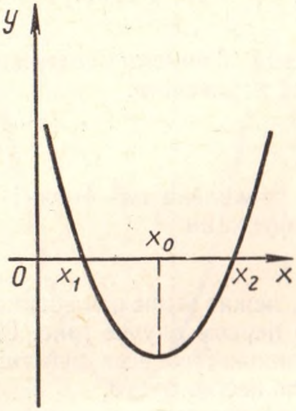

Рис. 64

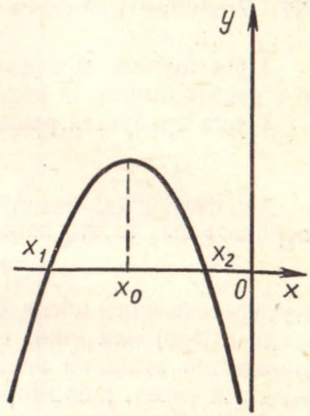

Рис. 65

Пусть $f(x) = 2x^2 + x - 1$, тогда $f(0) = -1$. Следовательно, $f(x) < 0$ для $x \in]-1; \frac{1}{2}[$ и $f(x) > 0$ для $x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Итак, решениями данного неравенства являются все действительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$x < -1 \text{ или } x > \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Решите неравенство $x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$.

Дискриминант $D = 16 - 20 = -4 < 0$. Положим $f(x) = x^2 - 4x + 5$, тогда $f(0) = 5 > 0$. Следовательно, график функции f лежит выше оси абсцисс, т. е. $f(x) > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Поэтому данное неравенство выполняется на всей числовой прямой.

Пример 3. Докажите, что при $x > 1$ выполняется неравенство

$$x^3 - 3x + 2 > 0.$$

Пусть $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Тогда

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 0 \text{ при } x > 1.$$

Следовательно, функция возрастает при $x \geqslant 1$, и так как

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0, \text{ то } f(x) > 0 \text{ при } x > 1.$$

Упражнения

Решите следующие неравенства:

486. $6x^2 - x - 2 \geqslant 0$.

487. $2x^2 + 6x + 5 \geqslant 0$.

488. $x^2 - 3x + 2 > 0$.

489. $x^2 - 2x + 3 < 0$.

490. $9x^2 - 3x - 2 > 0$.

491. $2 - x - x^2 \geqslant 0$.

492. Докажите, что при $x > 0$ имеют место следующие неравенства:

а) $\frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + x > 0$; б) $x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x > 0$.

493. Рассмотрите решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ в случае $D = 0$.

58. Общая схема исследования функций

Способ построения графика функции по точкам очень несовершенен: даже вычисление ординат большого числа точек может не дать верного представления о графике функции, а следовательно, и о ходе изменения функции.

Если предварительно исследовать функцию на монотонность и экстремумы, то потребуется значительно меньше точек и построенный по этим точкам график будет точнее отражать ход изменения функции. Такое исследование удобно проводить по определенному плану.

1. Находим область определения функции.
2. Находим производную данной функции.
3. Находим критические точки данной функции.
4. Находим промежутки монотонности и экстремумы функции.
5. Строим график функции.

Пример 1. Построить с исследованием график функции $y(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$.

1. $D(y) = R$.
2. $y'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x-1)(x+1)$.
3. Критические точки: 0; 1; —1.
4. Составляем таблицу:

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < +\infty$
$y'(x)$	+	0	—	0	+	0	—
$y(x)$	↗	4	↘	3	↗	4	↘
		max		min		max	

В первой строке этой таблицы расположены в порядке возрастания критические точки функции и ограниченные ими интервалы. Во второй строке отмечены знаки производной в этих интервалах. В третьей и четвертой строках сделаны выводы о ходе изменения данной функции («↗» — возрастает, «↘» убывает). Из таблицы видно, что

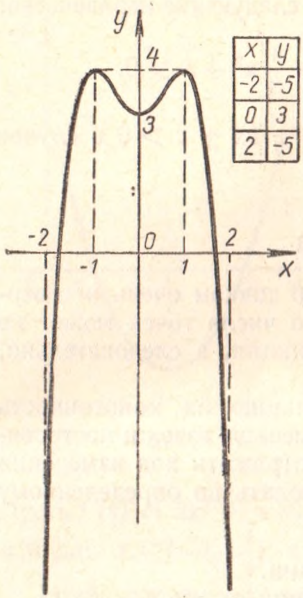

Рис. 66

$$y_{\max} = y(-1) = 4;$$
$$y_{\max} = y(1) = 4;$$
$$y_{\min} = y(0) = 3.$$

5. Строим график функции (рис. 66).

Пример 2. Построить график функции $f(x) = |x|$.

1. $x \in]-\infty; +\infty[$.

2. $f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -\infty < x < 0, \\ 1 \text{ при } 0 < x < +\infty. \end{cases}$

(См. пример 1 п. 55 (стр. 148).)

3. Единственной критической точкой функции является точка 0, в которой производная не существует.

4. Составляем таблицу:

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; +\infty[$
$f'(x)$	—	не существует	+
$f(x)$	↘	0	↗
		min	

5. Строим график функции (см. рис. 57 на стр. 148).

Пример 3. Построить график функции $f(x) = x^3 - 3x$.

1. $D(f) = R$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
3. Критические точки: -1; 1.
4. Составляем таблицу:

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 1[$	1	$]1; +\infty[$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗
		max		min	

5. Строим график функции (рис. 67).

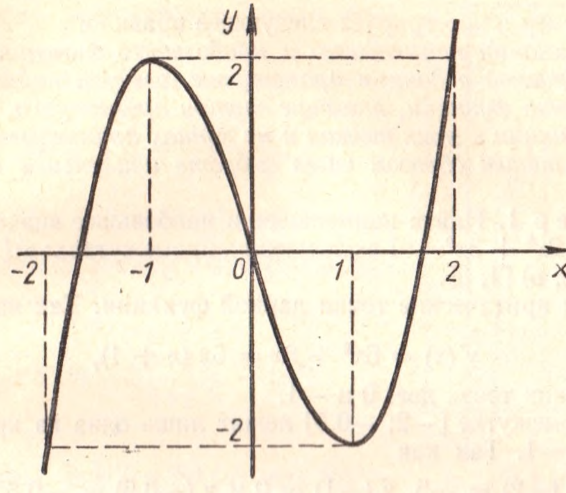

Рис. 67

Упражнения

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

494. $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

495. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$.

496. $f(x) = \dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$.

59. Наибольшие и наименьшие значения функций

На рисунке 68 изображен график функции f, определенной на отрезке $[a; b]$. В точке x_2 данная функция имеет максимум, а в точках x_1 и x_3 — минимумы. Наименьшего значения, как это видно на графике, функция достигает в точке x_3 — точке наименьшего из минимумов. Свое наибольшее значение функция принимает на правом конце отрезка в точке b, в которой функция не имеет экстремума (так как справа от точки b функция не определена).

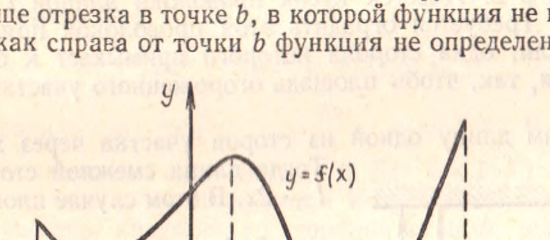

Рис. 68

Этот пример иллюстрирует следующее правило.

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой в данном промежутке, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри промежутка, вычислить значения функции в этих точках и на концах промежутка и из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

П р и м е р 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ в следующих промежутках: а) $[-2; -0{,}5]$; б) $[-0{,}5; 1]$; в) $[1; 3[$.

Находим критические точки данной функции. Так как

$$y'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1),$$

то критических точек две: 0 и -1.

а) В промежутке $[-2; -0{,}5]$ лежит лишь одна из критических точек: $x = -1$. Так как

$$y(-2) = -5, \; y(-1) = 0 \text{ и } y(-0{,}5) = -0{,}5,$$

то наибольшее значение этой функции достигается в точке -1 и равно 0, а наименьшее значение — в точке -2 и равно -5. Коротко это записывается так:

$$\max_{[-2;\ -0{,}5]} y(x) = y(-1) = 0, \qquad \min_{[-2;\ -0{,}5]} y(x) = y(-2) = -5.$$

б) $y(-0{,}5) = -0{,}5$; $\quad y(0) = -1$, $y(1) = 4$.

Следовательно, $\min\limits_{[-0{,}5;\ 1]} y(x) = -1$, $\quad \max\limits_{[-0{,}5;\ +1]} y(x) = 4$.

в) В промежутке $[1; 3[$ данная функция возрастает. Поэтому $\min\limits_{[1;\ 3[} y(x) = y(1) = 4$. Наибольшего значения эта функция не достигает в промежутке $[1; 3[$, так как точка 3 не принадлежит этому промежутку.

П р и м е р 2. Имеется кусок проволоки длиной l (*м*) (например, 80 *м*). Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Обозначим длину одной из сторон участка через x (рис. 69). Тогда длина смежной стороны равна $l - 2x$. В этом случае площадь равна:

$$S(x) = x(l - 2x) = lx - 2x^2.$$

Очевидно, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$. Таким образом, задача свелась к отысканию наибольшего значения функции S в промежутке $\left[0; \frac{l}{2}\right]$.

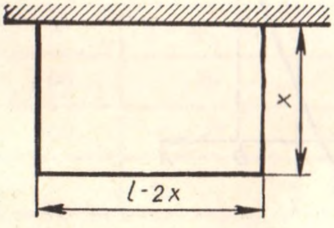

Рис. 69

Находим критические точки этой функции:

$$S'(x) = l - 4x;\ l - 4x = 0 \text{ при } x = \frac{l}{4},$$

$$S\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l}{4}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{l^2}{8},$$

а так как $S(0) = 0$ и $S\left(\frac{l}{2}\right) = 0$, то своего наибольшего значения функция S достигает при $x = \frac{l}{4}$.

$$\max_{\left[0;\ \frac{l}{2}\right]} S(x) = S\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{8}\ (м^2).$$

В частности, при $l = 80$ (*м*) $\max\limits_{[0;\ 40]} S(x) = 800$ (*м*^{2}).

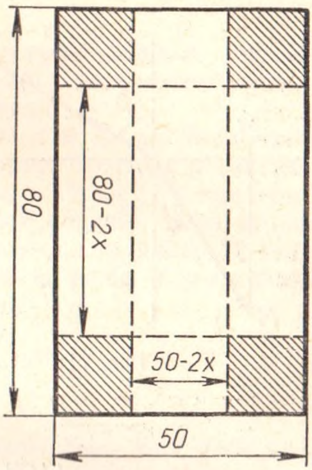

Рис. 70

Пример 3. Дан прямоугольный лист жести 80×50 *см*. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки (рис. 70).

Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата. Легко видеть, что $0 < x < 25$, и объем коробки при этом равен

$$V(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x.$$

Задача свелась к отысканию наибольшего значения функции V на отрезке $[0;\ 25]$. Так как

$$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000,$$

то, решая уравнение

$$12x^2 - 520x + 4000 = 0,$$

найдем критические точки: $x_1 = \frac{100}{3}$, $x_2 = 10$. В промежутке $[0;\ 25]$ находится лишь одна из них: 10. Так как $V(0) = V(25) = 0$, а $V(10) > 0$, то в точке 10 функция V принимает наибольшее значение, и, вырезая квадраты со стороной 10 (*см*), мы получим коробку наибольшего объема:

$$\max_{[0;\ 25]} V(x) = V(10) = 18\,000\ (см^3).$$

Пример 4. Пусть материальная точка движется из точки M в нижней полуплоскости в точку N верхней полуплоскости так, что в нижней полуплоскости ее скорость постоянна и равна v_1, а в верхней — v_2. По ка-

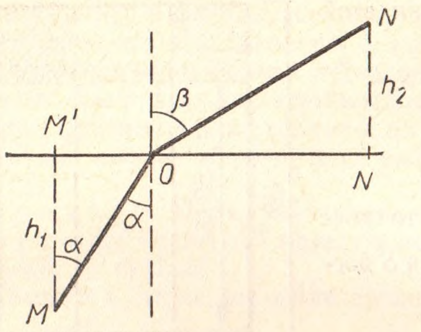

Рис. 71

кому пути должна двигаться точка, чтобы на весь путь затратить минимум времени (рис. 71)?

Если $v_1 = v_2$, то искомый путь есть отрезок MN. Если же $v_1 \neq v_2$, то точка должна двигаться по ломаной MON, причем положение точки 0 следует определить так, чтобы на путь MON было затрачено наименьшее время. Пусть отрезок MO точка проходит за время t_1, а $[ON]$ — за время t_2. Проведем отрезки $MM' \perp M'N'$, $NN' \perp M'N'$ и введем следующие обозначения:

$$|M'O| = x, \quad |MM'| = h_1,$$
$$|NN'| = h_2, \quad |M'N'| = l.$$

Тогда путь MON будет пройден за время

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{|MO|}{v_1} + \frac{|ON|}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2};$$

$$t'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}};$$

$$t'(x) = 0, \text{ если } \frac{x}{|MO|} : \frac{l-x}{|NO|} = \frac{v_1}{v_2}, \text{ т. е. если } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

В курсе физики вы узнаете, что именно так преломляется луч света при переходе из одной среды в другую (угол α называется *углом падения*, а угол β — *углом преломления*). Таким образом, луч света движется по такому пути, при котором время движения будет наименьшим. В этом и состоит известный в физике принцип Ферма.

Упражнения

497. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$$

в промежутках: а) $[-1; 1]$; б) $[0; 3]$.

498. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$, где $s(t)$ — путь (в метрах) и t — время (в секундах). В какой момент времени скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

499. Покажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

500. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

501. Данное положительное число разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

502. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать V литров жидкости. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

503. Буровая вышка расположена в поле в 9 *км* от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 *км* от упомянутой точки на шоссе (считаем шоссе прямой линией). Если курьер на велосипеде проезжал по полю 8 *км/ч*, а по шоссе 10 *км/ч*, то к какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта.

60*. Сведения из истории

Переломным пунктом в истории математики был XVII век. Декарт ввел в употребление метод координат для изучения расположенных в плоскости кривых. Развитие естествознания привело к необходимости исследования изменения функций, в особенности функций, выражающих зависимость координат движущихся тел и других физических величин от времени. Производная применялась к нахождению экстремумов функций, к нахождению касательных к разнообразным линиям и т. п. Первые работы Декарта, Паскаля и Ферма уже содержали в себе по существу правила нахождения производных от любых многочленов.

В настоящее время математическим анализом называют часть математики, которая изучает дифференциальное и интегральное исчисление (с элементами интегрального исчисления вы познакомитесь в X классе). Систематическое учение о производных, дифференциальное исчисление, было развито немецким математиком и философом Г. Лейбницем (1646—1716) и английским математиком и основателем современного математического естествознания И. Ньютоном (1643—1727).

Термин «функция» был введен Лейбницем, но долго под ним подразумевались лишь функции, заданные каким-либо аналитическим выражением. Во времена Эйлера функции, заданные в различных частях интервала разными уравнениями, не считались «настоящими» функциями. Но уже в 1822 г. французский математик Фурье в своих исследованиях пользовался по существу самым общим понятием функции, хотя явно и не сформулировал определение этого понятия.

Современное определение числовой функции, в котором это понятие освобождалось от способа задания, было дано независимо друг от друга русским математиком Н. И. Лобачевским в 1834 г. и немецким математиком Л. Дирихле в 1837 г. Основная идея этих определений заключалась в том, что в понятии функции не существенно, каким образом каждому x поставлено в соответствие определенное значение $f(x)$, важно только, чтобы это соответствие было установлено.

6 Заказ 311

Современное же понятие функции с произвольной областью определения и произвольным множеством значений (не обязательно числовыми), современная терминология и обозначения сформировались по существу совсем недавно — в первой половине текущего столетия.

Наглядный смысл понятия предела функции был ясен математикам XVII в. Они умели фактически правильно находить пределы. Но строгие определения понятий предела последовательности и предела функции, сохранившиеся до наших дней, были даны лишь французским математиком О. Коши (1789—1857) и далеко не сразу были всеми поняты.

Яркие характеристики глубины переворота в математике, происшедшего в XVII в., дали Карл Маркс и Фридрих Энгельс. Энгельс писал: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика». Но начальный период развития новых ветвей математики, связанных с понятиями функции, бесконечно малых величин, пределов и производных, был охарактеризован Марксом как «мистический».

Лозунгом многих математиков XVIII в. был: «Двигайтесь вперед, и вера в правильность результатов к вам придет».

Только после работ Коши в течение XIX в. начала математического анализа получили логическое обоснование. Для этого, в частности, была необходима строгая теория действительных чисел. А она была развита только во второй половине XIX в. Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором.

Дополнительные упражнения к главе V

504. В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом в 45°?

505. Найдите способ построения касательной к графику кубической параболы $y = x^3$ аналогично примеру 2 (стр. 139).

506. Постройте график какой-нибудь функции, у которой в заданной точке x_0:

а) $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) = 0$;
б) $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) < 0$;
в) $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) > 0$.

Определите промежутки монотонности следующих функций:

507. а) $u(x) = \frac{x}{x+1}$; б) $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

508. а) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$; б) $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

509. а) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$; б) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

510. Исследуйте на монотонность и экстремумы следующие функции:

а) $S(t) = \frac{4}{\sqrt{t^2+1}}$; б) $u(t) = \sqrt{t^2 - 1}$; в) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Исследуйте квадратичные функции и постройте их графики:

511. $y = 2x^2 + 5x - 3$.
512. $F(x) = x^2 + 8x + 16$.
513. $\Phi(x) = 3x^2 + 4x + 2$.
514. $H(x) = -x^2 + 6x - 9$.
515. $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$.
516. $g(x) = -3x^2 + 5x - 4$.

Решите неравенство:

517. $3x^2 - 2x - 1 < 0$.
518. $6x^2 - x + 2 \leqslant 0$.
519. $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$.
520. $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 > 0$.

Исследуйте функции и постройте их графики:

521. $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$.
522. $h(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5$.
523. $u(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
524. $w(x) = x^3 + x$.

525. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ в промежутках: а) $[-1; 1]$; б) $[1; 3]$.

526. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $h(x) = 3x^3 - 9x^2 + 2$ в промежутках: а) $[-1; 1]$; б) $[1; 3]$.

527. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг (одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга), найдите прямоугольник наибольшей площади.

528. Найдите отношение высоты к диаметру конуса, который при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность.

529. Кусок проволоки данной длины l нужно согнуть так, чтобы площадь ограниченного ею прямоугольника была наибольшей. Какими должны быть размеры прямоугольника?

530. Какой из равнобедренных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

531. Представьте число 12 в виде суммы двух положительных слагаемых, произведение которых имело бы наибольшее значение.

532. Представьте число 10 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

533. Число 8 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

534. В равнобедренный треугольник с основанием 20 *см* и высотой 8 *см* вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

535. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.

536. Лодка находится на расстоянии 3 *км* от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки желает достигнуть села B, находящегося на берегу на расстоянии 5 *км* от A. Лодка движется со скоростью 4 *км/ч*, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 *км*. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села B в кратчайшее время?

537. Концы отрезка AB, $|AB| = 5$ *м*, скользят по координатным осям. Скорость перемещения конца A равна 2 *м/сек*. Каков модуль скорости перемещения конца B в тот момент, когда конец A находится от начала координат на расстоянии 3 *м*?

538. Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 *м*. Нижний конец лестницы начинает скользить с постоянной скоростью 2 *м/сек*. С какой скоростью опускается в момент времени t верхний конец лестницы, с каким ускорением?

539. Неоднородный стержень AB имеет длину 12 *см*. Масса его части AM растет пропорционально квадрату расстояния точки M от конца A и равна 10 *г* при $AM = 2$ *см*. Найдите: 1) массу всего стержня AB и линейную плотность в любой его точке M; 2) чему равна линейная плотность стержня в точках A и B.

540. Тело, масса которого m, движется прямолинейно по закону $S(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ (α, β, γ — постоянные). Докажите, что сила, действующая на точку, постоянна.

541. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 *сек*. Определите угловую скорость колеса через 48 *сек* после начала вращения.

542. Тело с высоты 10 *м* брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 *м/сек*. Определите: а) на какой высоте от поверхности земли оно будет через 1 *сек*; б) через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли? (Считать $g = 10$ *м/сек*^{2}.)

543. Круглый металлический диск расширяется при нагревании так, что его радиус равномерно увеличивается на 0,01 *см/сек*. С какой скоростью увеличивается его площадь в тот момент, когда его радиус равен 2 *см*?

544. Лампа подвешена на высоте 12 *м* над прямой горизонтальной дорожкой, по которой идет человек, рост которого равен 1,8 *м*. С какой скоростью удлиняется его тень, если он удаляется со скоростью 50 *м/мин*?

545. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность, найдите прямоугольник наибольшей площади.

Глава VI ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

61. Радианное измерение угловых величин

Из курса восьмилетней школы известны различные единицы измерения угловых величин: прямой угол d*, градус, минута, секунда. Эти единицы связаны между собой равенствами:

$$d = 90^\circ,\ 1^\circ = 60',\ 1' = 60'',$$

$$1^\circ = \frac{1}{90}d,\ 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ,\ 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'.$$

В этих единицах измеряют величины углов, дуг, поворотов. На рисунке 72 величина $\widehat{AOB}$ угла AOB равна 60°. То же значение 60° имеет угловая величина $\overset{\smile}{AB}$ дуги AB. Луч OA отображается на луч OB при повороте вокруг точки O на $+60°$, или, что то же самое, на $-300°$.

Теперь мы познакомимся еще с одной единицей измерения угловых величин — радианом. Радиан — это $\frac{180}{\pi}$ градусов:

$$1\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Целесообразность введения такой единицы измерения угловых величин мо-

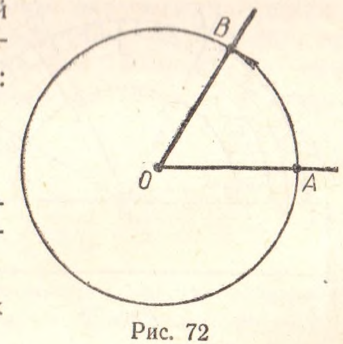

Рис. 72

* Строго говоря, d — общая величина всех прямых углов.